

# Redes complejas y aprendizaje asociativo

Alejandro Ehécatl Morales Huitrón<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas  
Universidad Nacional Autónoma de México  
alejandroe@ciencias.unam.mx

## Abstract

Trabajos recientes en modelado de redes como sistemas adaptativos complejos ha revelado que el desarrollo de memoria asociativa a escala del sistema podría facilitar la coordinación de todo el sistema. Sin embargo, hasta ahora este trabajo se ha limitado a modelos de redes que son equivalentes formalmente a dinámicas de satisfacción de restricciones en redes neuronales de Hopfield combinadas con aprendizaje Hebbiano. Este formalismo se ha usado para estudiar algunos tipos de dinámica social, como la formación de consenso, pero no es capaz de capturar directamente los dilemas clásicos de cooperación estudiados en teoría de juegos. En este documento se presenta un reporte de una aproximación al modelado de memoria asociativa y auto adaptación a una red compleja que interactúa con dilemas de cooperación provenientes de la teoría de juegos.

## Introducción

Desde el punto de vista de diferentes disciplinas como la antropología, se han estudiado los mecanismos de la cooperación humana: su evolución desde los pequeños grupos humanos de cazadores a toda la revolución cultural y las grandes y complejas sociedades que tenemos en la actualidad (Fuentes, 2004). Dado que evolutivamente los seres humanos y otras especies son egoístas como un mecanismo de adaptación y supervivencia, la existencia de cooperación parece contradictoria, y eso ha llevado a preguntas acerca de cómo las sociedades se mantienen en grandes grupos, dependiendo unos de otros, actuando de manera altruista y en muchos casos de una manera totalmente opuesta.

La evolución de la cooperación se estudia desde diversos frentes, uno de ellos es a través de modelos computacionales de redes complejas, las cuales pretenden no solamente simular redes sociales reales sino también sistemas vivientes en general. Distintos resultados como por ejemplo un estudio de Santos y otros autores muestran que la coevolución de una red compleja basada en cambios que los individuos pueden hacer en su estrategia (de acuerdo a su interés) y cambios en sus conexiones con otros, favorecen la cooperación (Santos and Pacheco, 2005; Santos et al., 2006). En dichos estudios se utiliza la teoría de juegos (ver siguiente

sección) como forma básica de interacción entre individuos y la red compleja evoluciona en el tiempo de acuerdo a las decisiones que toman los mismos.

La topología inicial de la red compleja influye en su comportamiento y estados futuros así como en la coordinación o la cooperación, de esta forma lo indica un estudio de Cassar (2007) en redes aleatorias y de mundo pequeño con interacción en teoría de juegos. Asimismo se pueden obtener diferentes métricas provenientes de la teoría de gráficas como por ejemplo el coeficiente de *clustering*, el coeficiente cíclico, la modularidad, la heterogeneidad, entre muchos otros y son importantes si queremos explotar mejor nuestra red.

Por otra parte, estudios recientes en modelado de redes sociales como sistemas complejos adaptativos ha revelado que el desarrollo de memoria asociativa en la escala del sistema facilita la aparición de coordinación social (Watson et al., 2011b). Watson y sus colaboradores propusieron un modo de implementar auto-optimización en un sistema complejo adaptativo que se adhiere al formalismo de una red de Hopfield. Demostraron que si una red pasa repetidamente por la siguiente secuencia de pasos: (a) aleatorizar los estados (o también llamado relajación de estados), (b) convergencia en un atractor, (c) aplicación de aprendizaje Hebbiano, entonces comenzará a formar una memoria asociativa de sus propios atractores. Esta reestructuración no supervisada de la topología de la red después de cada relajación tienen el efecto de hacer que el estado de la red converja de forma global a un atractor óptimo. Este atractor representa coordinación ya que cuando es alcanzado significa que no hay conflictos de intereses en la utilidad de cada individuo, por lo que no requieren hacer cambios en la red. Este algoritmo se utilizó en un modelo de red social para informar debates sobre procesos que pueden explicar los orígenes de la complejidad social (Froese et al., 2014). También podría aplicarse a otros campos como las redes reguladoras de genes, las redes sociales o las redes ecológicas, no sólo a las redes neuronales, y esto funciona bien cuando se puede suponer que estas redes son descriptibles en términos del formalismo de Hopfield.

Existen también similitudes entre el escenario de la red

de Hopfield y el de la interacción con teoría de juegos, y el proceso de auto optimización basado en memoria puede ser descrito como un tipo especial de juego aplicado a una red de individuos habituados (Davies et al., 2011). Lo anterior podría hacernos pensar que un esquema puede ser utilizado en el otro (es decir el mecanismo de teoría de juegos de la red compleja metido en una red de Hopfield). Sin embargo ese camino no es tan facil de recorrer, ya que al parecer una relación en una red compleja parece no guardar la memoria de los atractores. En este trabajo dilucidaré un poco esta cuestión poniendo como ejemplo de una posible metodología a seguir para establecer el puente entre los dos esquemas.

Para poder entender mejor las ideas que se desarrollan en esta investigación desarrollaré y pondré en contexto de manera breve a la teoría de juegos.

### Teoría de juegos

La teoría de juegos es el estudio matemático de las interacciones entre uno o más individuos en donde se asignan recompensas de manera predeterminada de acuerdo a las decisiones que tomen los involucrados, enfocándose en el resultado de esas interacciones y suponiendo que los agentes son racionales (Binmore, 2007). Al suponer agentes racionales ideales que procurarán maximizar su utilidad, se podría pensar que aplicar estos juegos no es de utilidad en estudios sociales, ya que las personas que se desenvuelven en sociedades presentan comportamiento caótico en muchas ocasiones<sup>1</sup>. A pesar que de eso es muy usada para el diseño de dispositivos, redes o incluso organizaciones, ya que tener en cuenta participantes egoístas en interacciones estratégicas puede conducir a mejores resultados. También tiene la ventaja de que es fácilmente programable en una computadora. Ejemplos de juegos muy utilizados en diferentes campos son el dilema del prisionero y sus variantes (es el estándar de análisis en teoría de juegos), juegos de coordinación, de cooperación, de estrategia, etc.

Ejemplos específicos utilizados en este trabajo son dilemas de cooperación modelados en términos de juegos simétricos de dos jugadores. Los jugadores pueden cooperar o desertar en la interacciones. Cuando ambos cooperan, reciben un pago  $R$  (recompensa por cooperación mutua); si los dos desertan, reciben un pago  $P$  (castigo por deserción mutua). Los casos restantes ocurren cuando uno deserta y el otro coopera, dando como resultado el pago  $T$  (tentación de engaño) para el desertor y  $S$  (desventaja de ser engañado) para el cooperador. Dependiendo del orden relativo de los cuatro valores de pago y asumiedo que la cooperación mutua tiene preferencia sobre la deserción mutua, los siguientes dilemas sociales surgen:

- $PD$ : el dilema del prisionero en el que  $T > R > P > S$

<sup>1</sup>O a veces son simplemente comportamientos que son parte de la compleja naturaleza humana como la abnegación, el altruismo y otros comportamientos parecidos a veces espontáneos o a veces premeditados.

	Agent2	Cooperation (C)	Defection (D)
Agent1			
Cooperation (C)		$R, R$	$S, T$
Defection (D)		$T, S$	$P, P$

Figura 1: Esquema de dilemas de cooperación.

	Party	Home
Party	$10, 5$	$0, 0$
Home	$0, 0$	$5, 10$

Figura 2: Juego de la batalla de los sexos.

- $SG$ : la caza del ciervo  $R > T > P > S$
- $SD$ : el juego de la gallina  $T > R > S > P$  también conocido como el del montón de nieve (*snowdrift*).

Se esquematizan en la Figura 1.

Otra clase de juegos son los de coordinación, que pueden verse como juegos en los que los participantes tienen los mismos intereses. Un ejemplo es el juego de la batalla de los sexos (Figura 2), en el que dos personas deciden la siguiente actividad que realizarán, pero las acciones van en contra de sus intereses.

### Cooperación en una red compleja

Como mencioné en la introducción, un estudio de Santos et al. (2006) que evalúa la cooperación en una red compleja en la que los nodos son individuos que bien pueden ser cooperadores o desertores. La red evoluciona en el tiempo de acuerdo a dos tipos de cambios que continuamente se realizan:

- En la estrategia de los individuos, es decir de acuerdo a una función de aptitud basada en el comportamiento de sus vecinos y en el juego que se trate (de los dilemas de cooperación vistos en la sección anterior:  $SG, PD, SD$ ) los individuos pueden decidir cambiar de cooperador a desertor y viceversa.
- Cambios en la topología de la misma dependiendo de un valor  $W$  de comportamiento adaptativo. Si  $W$  es mayor, los individuos reaccionan con mayor rapidez a sus conexiones adversas (las que provocan tener una menor aptitud).

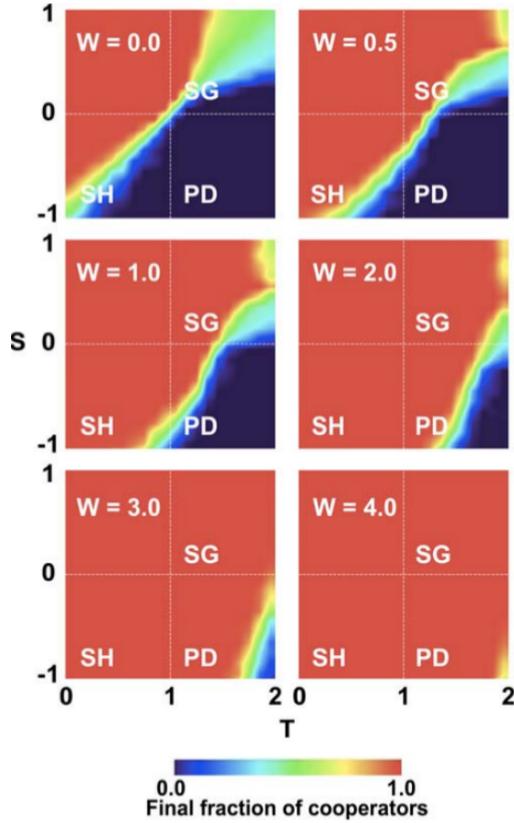


Figura 3: Porcentaje de cooperadores

Lo anterior da como resultado que si  $W$  es mayor, la cooperación aumenta después de cierto número de generaciones. Lo anterior se ve reflejado en el gráfico de la Figura 3.

En ella se muestra el porcentaje de cooperadores después de trabajar con una gráfica aleatoria de 1000 nodos que evolucionó en el tiempo. Al inicio la conectividad promedio era de 30 (cada nodo con 30 vecinos) y un estado inicial aleatorio en el que la mitad eran cooperadores y la mitad desertores. Las regiones cuadradas especifican el dilema de cooperación que se utilizó. También se observan los valores de los parámetros de tentación de engaño ( $T$ ) y desventaja de ser engañado ( $S$ ) que varían de 0 a 2 y de -1 a 1 respectivamente. La simulación se detuvo cuando se llegó al total de cooperadores, en los casos en los que no ocurrió eso se puso un límite de  $10^8$  generaciones y se promedió el porcentaje de cooperadores de las últimas 1000. Como se puede apreciar, es importante el parámetro  $W$  de comportamiento adaptativo o “ola de cooperación” ya que tiene un impacto directo en la proporción de cooperadores.

$$s_i(t+1) = \theta \left[ \sum_j^N \omega_{ij} s_j(t) \right]$$

Figura 4: Actualización de estados

$$E_S = H(S(t), \Omega) \equiv - \sum_{ij}^N \omega_{ij} s_i(t) s_j(t)$$

Figura 5: Función de energía

### Memoria asociativa en redes de Hopfield

Otro esquema en el que se pueden modelar redes sociales como sistemas complejos adaptativos es con las redes de Hopfield. Las cuales son redes neuronales recurrentes que tiene un patrón de conexión sináptica que actúa de modo que su dinámica es la de una función de Lyapunov. Dos propiedades conocidas de sistemas complejos estudiadas independientemente en una red de Hopfield son: (a) un comportamiento en el que se minimiza la energía en un sistema, que se interpreta como una optimización local de sus restricciones, (b) el aprendizaje Hebbiano que es la capacidad de implementar memoria asociativa. En un estudio (Watson et al., 2011a) se muestra que la aplicación (bajo ciertas condiciones) de memoria asociativa y minimización de energía en diferentes escalas temporales crea un proceso en el que el sistema tiene la habilidad de encontrar configuraciones que minimizan las restricciones de sus variables y globalmente minimizan la energía. Explicaré un poco más a detalle este modelo.

Las red de Hopfield de estado y tiempo discreto consiste de  $N$  estados discretos  $s = -1, +1$  y pesos  $\omega$  cuyas actualizaciones vienen dadas por la ecuación en la Figura 4. La función de energía que corresponde a la suma de tensiones en los estados de las variables, o dicho de otro modo, el grado en que las influencias de otras variables de estado actúan para oponerse al estado actual, se define en la fig. 5. El aprendizaje Hebbiano se refleja en las conexiones de la gráfica y está dado por la fórmula 6.

La aplicación consecutiva de relajaciones del sistema (reinicios en los estados, convergencia a un atractor (bajo actualizaciones sucesivas) y aplicación de aprendizaje Hebbiano, el sistema comenzara a tener memoria asociativa de sus propios atractores y llevara a un estado de óptimo global (Figura 7).

### Metodología

En las dos secciones anteriores se describieron las investigaciones precedentes (Santos and Pacheco, 2005; Watson et al., 2011b) cuyas ideas utilizaremos a continuación. Aho-

$$\omega_{ij}(t+1) = \omega_{ij}(t) + \delta s_i(t) s_j(t)$$

Figura 6: Aprendizaje Hebbiano

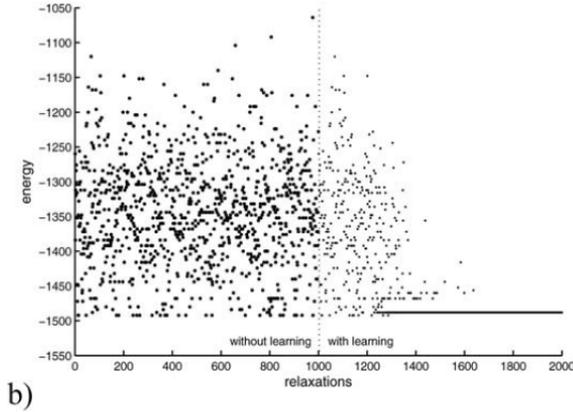


Figura 7: Alcance de un atractor

ra se procederá a introducir un esquema de relajaciones en la red compleja que trabaja con teoría de juegos y cooperación.

Al igual que en el modelo coevolucionario de Santos, se evalúa la influencia en la topología de una red que evoluciona de acuerdo a los tres dilemas de cooperación. Los individuos pueden ya sea cooperar o desertar a través de las interacciones. También se utiliza el parámetro de comportamiento adaptativo  $W$ , dependiendo de su valor los individuos modifican sus conexiones. Con  $W = 0$  tenemos una evolución asíncrona de la estrategia definida del siguiente modo: se selecciona un individuo  $A$  y uno de sus vecinos aleatorios  $B$ , después ellos interactúan con sus vecinos de acuerdo al dilema social especificado. Luego acumulan pagos totales  $P(A)$  y  $P(B)$ , respectivamente. La estrategia de  $B$  reemplaza a la de  $A$  (cambio de cooperador a desertor, o al revés) con una probabilidad dada por la distribución de Fermi. Si  $W > 0$ , se elige una actualización de estrategia con una probabilidad  $(1 + W)^{-1}$ , de otro modo se elige una actualización estructural (de topología de la red). En una actualización estructural, los individuos interactúan vía las aristas de la gráfica.  $B$  ( $A$ ) se satisface (no se satisface) si  $A$  ( $B$ ) es un cooperador (desertor). La acción tomada es contingente con el fitness de  $P(A)$  y  $P(B)$ , respectivamente. Con una probabilidad  $p$  (dada por la distribución de Fermi),  $A$  se conecta con un vecino aleatorio de  $B$ . con una probabilidad  $1 - p$ ,  $A$  permanece conectado a  $B$ .

Para modificar el modelo de Santos et al. de un modo de de Watson et al., se considera una población de  $N=50$  in-

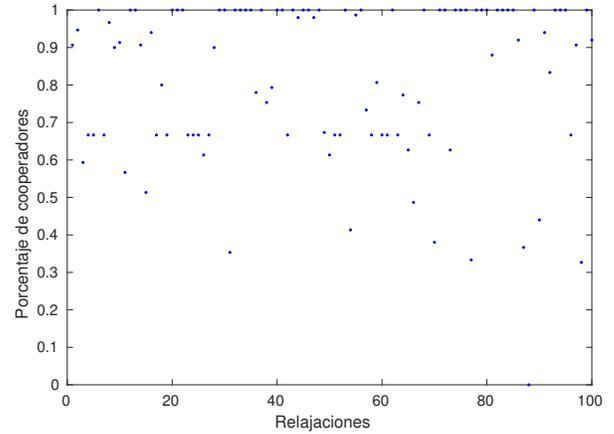


Figura 8: Primer resultado

dividuos<sup>2</sup> representada en una gráfica aleatoria con conectividad  $z=6$ . Se comienza con 50% de cooperadores distribuidos aleatoriamente. La parte principal consiste en ciclos de 5000 corridas continuas de actualizaciones (como se describieron previamente) seguidas de relajaciones (como en el modelo de red de Hopfield). Se realiza un número total de 100 ciclos en los que las estrategias se reiniciaron al inicio de cada ciclo.

## Resultados

La gráfica de la Figura 8 contiene el porcentaje de cooperadores antes de cada relajación (en un promedio de tres corridas diferentes) y la Figura 9 muestra también el porcentaje de cooperadores pero detallado entre tres reinicios (que como se había especificado son de 5000 actualizaciones cada uno).

Se puede observar aun tras sucesivos reinicios no hay un patrón en los individuos que propicien la cooperación del modo en que lo hace la red de Hopfield con memoria asociativa, lo que lleva a deducir que las relajaciones no funcionan como un modo de resolver restricciones en la red vistas como “tensiones” sociales. Quizá tenga que ver el comportamiento destructivo de los cambios de conexiones o la ausencia de pesos en las aristas.

Existen diferentes maneras de modificar el modelo y probar si se puede hacer una transición entre los dos modelos. Un estudio de Davies et al. (2011) muestra un modelo de red de Hopfield con interacción de juegos de coordinación/anticordinación en el que se presenta optimización global de la red si usar aprendizaje Hebbiano. El argumento es que la estrategia de los individuos se basa en un mecanismo de habituación en el que tienen preferencia por adaptarse

<sup>2</sup>Se eligió ese número ya que en este momento no tengo acceso a un cluster y uso mi computadora personal. En la cual una simulación con 1000 individuos tomaría un tiempo prohibitivo.

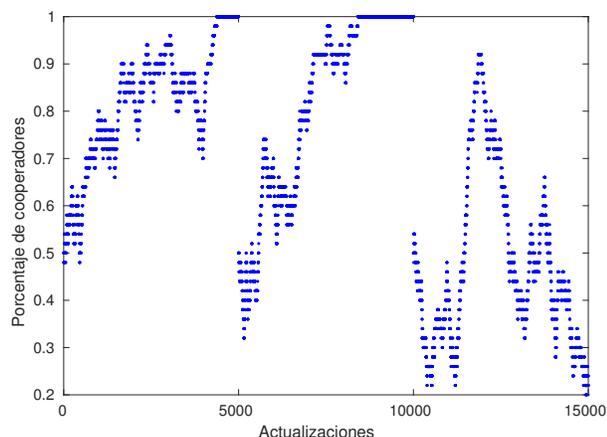


Figura 9: Segundo resultado

al comportamiento de los que tienen más cerca en lugar los óptimos. Además, mediante un proceso en el que ligeramente se cambian los valores de la matriz de pagos del juego es como obtienen el resultado (una estrategia muy parecida al reforzamiento de Hebb).

Estos estudios aunque son simulaciones computacionales de modelos sociales, respaldados por los sistemas complejos pueden dar una buena luz acerca de los orígenes de la complejidad social. Aún falta un camino por recorrer en la interpretación de los resultados en términos de fenómenos sociales, por ejemplo ¿cuál sería el equivalente social de relajación en nuestras simulaciones? ¿cuáles serían las implicaciones de conocer patrones de comportamiento social y qué tan exactamente nos describirían? Sin duda en un área de investigación que tiene mucho que ofrecer en tiempos venideros.

## References

- Binmore, K. (2007). *Game theory: a very short introduction*, volume 173. Oxford University Press.
- Cassar, A. (2007). Coordination and cooperation in local, random and small world networks: Experimental evidence. *Games and Economic Behavior*, 58(2):209–230.
- Davies, A. P., Watson, R. A., Mills, R., Buckley, C. L., and Noble, J. (2011). “if you can’t be with the one you love, love the one you’re with”: How individual habituation of agent interactions improves global utility. *Artificial Life*, 17(13):167–181.
- Froese, T., Gershenson, C., and Manzanilla, L. R. (2014). Can government be self-organized? a mathematical model of the collective social organization of ancient teotihuacan, central mexico. *PloS one*, 9(10).
- Fuentes, A. (2004). It’s not all sex and violence: Integrated anthropology and the role of cooperation and social complexity in human evolution. *American Anthropologist*, 106(4):710–718.

- Santos, F. C., M., P. J., and Lenaerts, T. (2006). Cooperation prevails when individuals adjust their social ties. *PLoS computational biology*, 2(10):e140.
- Santos, F. C. and Pacheco, J. M. (2005). Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Physical Review Letters*, 95(9):098104.
- Watson, R. A., Buckley, C. L., and Mills, R. (2011a). Optimization in “self-modeling” complex adaptive systems. *Complexity*, 16(5):17–26.
- Watson, R. A., Mills, R., and Buckley, C. L. (2011b). Global adaptation in networks of selfish components: Emergent associative memory at the system scale. *Artificial Life*, 17(3):147–166.