Norma de Vectores

- La norma de un vector es el análogo al valor absoluto de un escalar real y se denota por $||\bullet||$.
- Las normas dan una medida de distancia para espacios vectoriales.
- Las propiedades de una norma vectorial son:
  - $\bar{x} \neq \bar{0}, \|\bar{x}\| > 0$
  - $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\|\bar{x}\|$
  - $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (desigualdad triangular)
- Las tres normas más comunes son:
  - Norma en L1 $\quad \|\bar{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$
  - Norma en L2 $\quad \|\bar{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$
  - Norma en L∞ $\quad \|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- Un vector unitario, con respecto a cierta norma, es un vector que satisface $\|\bar{x}\| = 1$, y lo denotamos por $\vec{x}$.

Producto Interno para Vectores

- El producto interno (punto, escalar) de dos elementos de un mismo espacio lineal como un mapeo $V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, $(v_1,v_2) \longrightarrow$ $<v_1,v_2> \in \mathbb{C}$, que para vectores $\mathbb{R}^n$ se define:
  - $\bar{x}\cdot\bar{y} = \langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
  - $\bar{x}\cdot\bar{y} = \langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \|\bar{x}\|_2 \|\bar{y}\|_2 \cos\theta$ donde θ representa el angulo entre los dos vectores.
- El producto interno tiene las siguientes propiedades:
  - $\langle \bar{v},\bar{v}\rangle \geq 0$
  - $\langle \bar{v},\bar{v}\rangle = 0 \leftrightarrow \bar{v} = \theta$ donde θ es el elemento nulo del espacio V.
  - $\langle \bar{v},\bar{w}\rangle = \left(\langle \bar{w},\bar{v}\rangle\right)^*$
  - $\langle \bar{u}+\bar{v},\bar{w}\rangle = \langle \bar{u},\bar{w}\rangle + \langle \bar{v},\bar{w}\rangle$
  - $\langle \alpha\bar{u},\bar{v}\rangle = \alpha\langle \bar{u},\bar{v}\rangle$
- Se puede definir una norma a través del producto interno:

$$\|\bar{v}\| = \left(\langle \bar{v},\bar{v}\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

Campos

- Un campo es cualquier conjunto de elementos que satisfacen los siguientes axiomas:

		suma	multiplicación
a.	Asociatividad:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
b.	Conmutatividad:	$a + b = b + a$	$ab = ba$
c.	Distributividad:	$a(b + c) = ab + ac$	$(a + b)c = ac + bc$
d.	Identidad:	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
e.	Inversos:	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$

y es un álgebra divisoria conmutativa.

Multiplicación de Matrices

Producto Interno

- La multiplicación de dos matrices **A** y **B** se lleva a cabo:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times q} = \mathbf{C}_{m\times q},\ \text{donde } \mathbf{c}_{mq} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{kq}$$

$$\boxed{\mathbf{c}_{mq} = \left\langle \left(\overline{a}^{m}\right)^{T}, \overline{b}^{q} \right\rangle}$$

Espacios Producto-Interno

- Desigualdad de Schwartz: sea V un espacio con producto interno y $\bar{u},\bar{v} \in V$, la desigualdad de Schwartz se define como
$$\left|\langle \bar{u},\bar{v} \rangle\right| \leq \|\bar{u}\|_2^2 \|\bar{v}\|_2^2$$
La igualdad solo se cumple si $\bar{u} = \alpha\bar{v}$.
- Ecuación del Paralelogramo: sea V un espacio con producto interno y $\bar{u},\bar{v} \in V$ satisfacen la ecuación del paralelogramo definida como $\|\bar{u}+\bar{v}\|_2^2 + \|\bar{u}-\bar{v}\|_2^2 = 2\left(\|\bar{u}\|_2^2 + \|\bar{v}\|_2^2\right)$
- Los Espacios Lineales Normalizados son Casi Espacios Producto-Interno. Se puede definir un producto interno sobre un espacio lineal con norma. Si tenemos $\bar{u},\bar{v} \in V$, donde V es un espacio lineal con norma, entonces
$$\langle \bar{u},\bar{v} \rangle = \tfrac{1}{4}\left[\|\bar{u}+\bar{v}\|_2^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|_2^2\right]$$
Es casi un producto interno sobre el espacio V.

Combinación Lineal
Mapeos Lineales

- Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos de un espacio lineal V, de tal forma que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. La suma de los productos de estos elementos con coeficientes escalares $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, se le conoce como una combinación lineal de los elementos $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- Si una combinación lineal produce el elemento nulo del espacio V,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \theta,$$

se le conoce como una combinación lineal trivial (no trivial en caso contrario).

- Un mapeo f de un espacio lineal V a otro espacio lineal W se conoce como mapeo lineal, si se cumple lo siguiente

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f\left(v_i\right).$$

Independencia Lineal y Dimensión de un Espacio Lineal

- Un conjunto $\{v_i\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si la única combinación trivial de vectores v_i es aquella con coeficientes iguales a cero:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \theta \Rightarrow \forall \alpha_i = 0$$

de otra manera, los vectores son linealmente dependientes.

- Un conjunto finito $\{v_i\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vectores linealmente independientes se conoce como una base para el espacio V, si el conjunto genera el espacio V completo.
- Un espacio vectorial que tiene una base finita se llama dimensionalmente finito.
- La definición de base implica que cualquier vector $\bar{v} \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de vectores de una base:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

- El número de elementos en una base se conoce como la dimensión del espacio lineal.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Si asumimos que **A** es una matriz. Entonces $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$ es un sistema lineal de ecuaciones. Si **A** es cuadrada y no-singular, entonces existe una solución única $\bar{x} = \mathbf{A}^{-1}\bar{b}$.
- Para el sistema de ecuaciones lineales que involucra *n* variables y *m* ecuaciones

$$\mathbf{A}\bar{x} = \bar{c} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}$$

existen tres posibles soluciones:

- El sistema es inconsistente y no existe solución.
- El sistema es consistente y existe una solución única.
- El sistema es indeterminado y existen soluciones múltiples.

Mapeo Métrico y Espacio Métrico

- Un mapeo métrico se define como un mapeo $\rho : V \times V \to \mathbb{R}^+$, o $\rho : V^2 \to \mathbb{R}^+$. Al número $\rho(v_1, v_2)$ se le llama distancia métrica, si los siguientes axiomas se cumplen:
  - $\forall v_1, v_2 \in V : \rho\left(v_1, v_2\right) = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$.
  - Simetría: $\forall v_1, v_2 \in V : \rho\left(v_1, v_2\right) = \rho\left(v_2, v_1\right)$.
  - Desigualdad triangular: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : \rho\left(v_1, v_3\right) \leq \rho\left(v_1, v_2\right) + \rho\left(v_2, v_3\right)$.
- La distancia métrica es siempre mayor o igual a cero: $\rho\left(v_1, v_2\right) \geq 0$.
- El conjunto V junto con un distancia métrica que satisface todos los axiomas de una distancia métrica, (V, ρ), es un espacio métrico.

Secuencias de Cauchy

- Dado un espacio métrico (V, ρ), la secuencia $(v_1, v_2, \dots, v_n, \dots)$ converge a $\tilde{v} \in V$ si por cada valor real ε existe un número $N(\varepsilon)$ de forma tal que todos los elementos de la secuencia con índices mayores a N tienen una distancia a $\tilde{v}$ menor que ε,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \Rightarrow \forall n \geq N, \rho(\tilde{v}, v_n) < \varepsilon$$
En este caso, el elemento $\tilde{v}$ se conoce como el límite de la secuencia.
- Secuencias de Cauchy: Una secuencia es convergente si para todo número real ε existe un número $N(\varepsilon)$ tal que la distancia métrica entre cualquiera dos de los elementos que tienen índices mayores a N es menor a ε,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \Rightarrow \forall n, m \geq N, \rho(v_m, v_n) < \varepsilon$$
- Una ε-esfera abierta centrada en $\tilde{v}$, $B_\varepsilon(\tilde{v})$ se puede ver como un subconjunto del espacio V, cuya distancia a $\tilde{v}$ es menor a ε:
$$v \in B_\varepsilon(\bar{v}) \Leftrightarrow \rho(v, \bar{v}) < \varepsilon$$
- Una secuencia $(v_1, v_2, \dots, v_n, \dots)$ converge a un elemento $\tilde{v}$ si para todo número real ε existe un número $N(\varepsilon)$ tal que todos los elementos de la secuencia con índices mayores $N(\varepsilon)$ están dentro de la ε-esfera centrada en $\tilde{v}$,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \Rightarrow n \geq N(\varepsilon), v_n \in B_\varepsilon(\tilde{v})$$

Conjuntos Abiertos y Cerrados

- Un punto v_i de un subconjunto $V_1 \subset V$ es un punto interior del subconjunto si existe un número positivo pequeño ε de forma tal que todos los elementos de v_i constituyen la ε-esfera centrada en v_i, pertenecen al subconjunto V_1,

$$\exists \varepsilon : B_\varepsilon\left(v_i\right) \subseteq V_1$$

- Si todos los puntos de un subconjunto son puntos interiores, tal conjunto es un subconjunto abierto.
- Un punto v_c de un conjunto V es un punto de cierre del subconjunto $V_1 \subset V$, si por cada número ε existe un punto $v_j \in V_1$ de forma tal que la distancia métrica $\rho(v_j, v_c) < \varepsilon$,

$$\forall \varepsilon \left(B_\varepsilon\left(v_c\right) \cap V_1 \neq \varnothing\right)$$

- Un conjunto es cerrado si contiene todos sus puntos de cierre.

Espacios de Hilbert

- Un Espacio de Hilbert es un espacio vectorial **H** con un producto interno $\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$ de forma tal que la norma:

  $$\|\bar{v}\| = \left(\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

  convierte **H** en un espacio métrico completo. Si la métrica definida por la norma no es completa, entonces **H** se conoce como espacio de producto interno.

  Ejemplos:

  1. Los número reales $\mathbb{R}^n$ con el producto punto $\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$.
  2. Los números complejos $\mathbb{C}^n$ con el producto punto $\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$.

Funciones Continuas

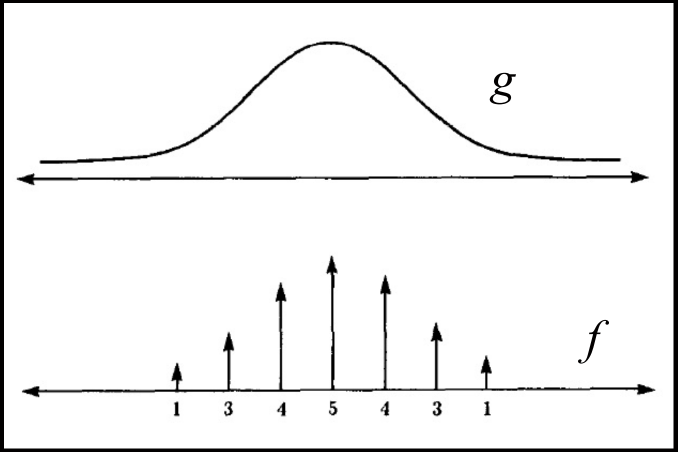
- Una función, f es continua en un intervalo I, si y sólo si la función es continua en todos los puntos del intervalo, es decir:

f es continua en un intervalo $I \leftrightarrow \forall a \in I, \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

- Dado que una función f es continua en un intervalo abierto (a, b) si la función es continua en todos los puntos del intervalo, entonces f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si y sólo si es continua en el intervalo (a, b) y además es continua en el punto a por la derecha y en el punto b por la izquierda.

Funciones Discretas

- Es un mapeo f:$A \rightarrow Y$, de tal forma que A es un subconjunto contable $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ del dominio. En otras palabras $f(a_i)=y_i$, para todo a_i que pertenece a la secuencia.



Ortogonalidad

- En un espacio de Hilbert V, dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, son ortogonales si: $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$,

que típicamente se denota como $\bar{u} \perp \bar{v}$.

- Un vector $\bar{v} \in V$ es ortogonal a un subconjunto $V_1 \subset V$ si

$$\bar{v} \perp V_1 \leftrightarrow \forall \bar{v}_i \in V_1 \left(\langle \bar{v}, \bar{v}_i \rangle = 0 \right)$$

- Dos subconjuntos V_1 y V_2 del conjunto V son ortogonales si

$$V_1 \perp V_2 \leftrightarrow \forall \bar{u}_i \in V_1, \forall \bar{v}_j \in V_2 \langle \bar{u}_i, \bar{v}_j \rangle = 0$$

Teorema de la Proyección

- Sea M un subespacio V, qué es un espacio de Hilbert. Para cualquier elemento $\bar{v} \in V$ existe un elemento único $\bar{m}_0 \in M$ el cual tiene la menor distancia métrica a $\bar{v}$ para todo $\bar{m} \in M$:

$$\forall \bar{v} \in V \; \exists \bar{m}_0 \in M : \forall \bar{m} \in M \left(\rho\left(\bar{v} - \bar{m}_0\right) \leq \rho\left(\bar{v} - \bar{m}\right) \right)$$

este elemento $\bar{m}_0$ satisface la condición

$$\left(\bar{v} - \bar{m}_0\right) \perp M$$

Bases Ortogonales

- A un conjunto $\{\overline{v}_i\}$ de vectores en un espacio de Hilbert V, cada uno de ellos ortogonal a todos los demás

$$\forall i \neq j, \left\langle \overline{v}_i, \overline{v}_j \right\rangle = 0$$

se le llama un conjunto ortogonal. Si todos los vectores de dicho conjunto tienen norma igual a uno, entonces el conjunto de vectores es ortonormal. Típicamente se denota como

$$\left\langle \overline{v}_i, \overline{v}_j \right\rangle = \delta_{i,j}, \quad \text{donde} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Teorema de Conjuntos Ortogonales:

Un conjunto ortogonal de vectores, todos diferentes a cero, es un conjunto linealmente independiente.