¿Qué es una Imagen Digital?

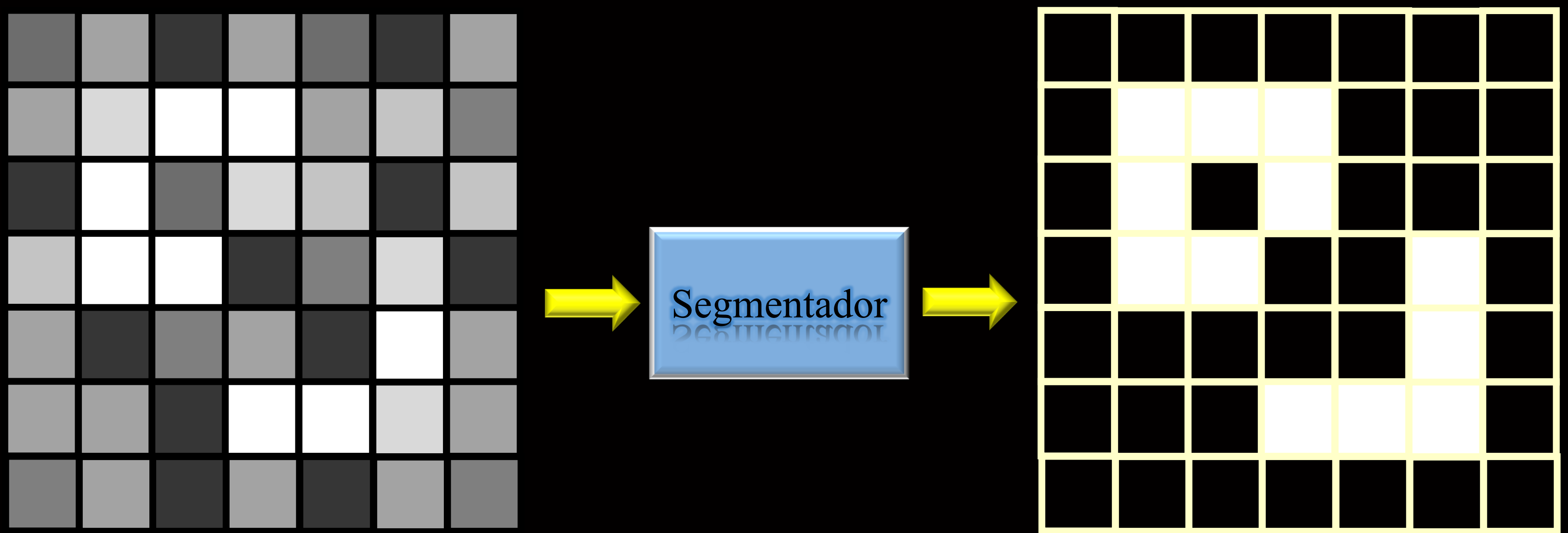
- Un *espacio digital* es el par (V, π) donde V es cualquier conjunto no vacio y π es una relación binaria simétrica en V de forma tal que V es π-conectado.
- Una *imagen digital* sobre un espacio digital (V, π) es un triplete (V, π, f), donde f es una función con dominio en V.
- Una *imagen binaria* es aquella donde f tiene como rango $\{0,1\}$.

¿Qué es una Imagen Digital?

Sistema de Imagenología

1	2	3
4	5	6
7	8	9

¿Qué es una Imagen Digital?



(V, π, f)

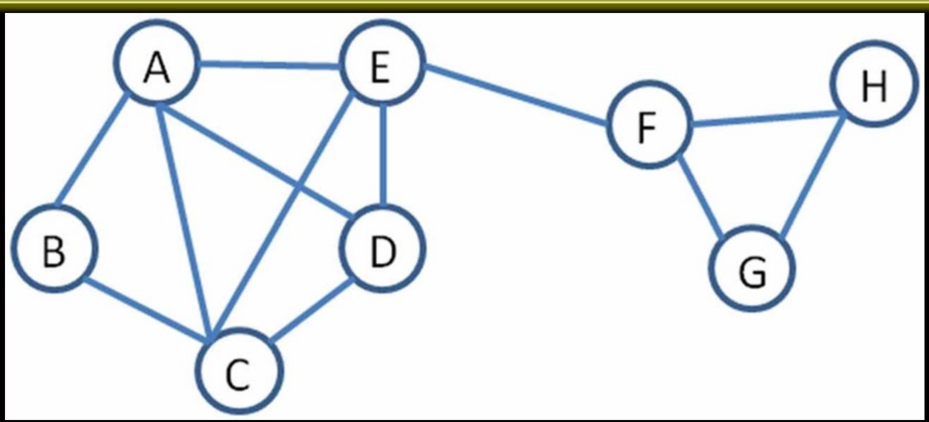
$(V, \pi, \{0,1\})$

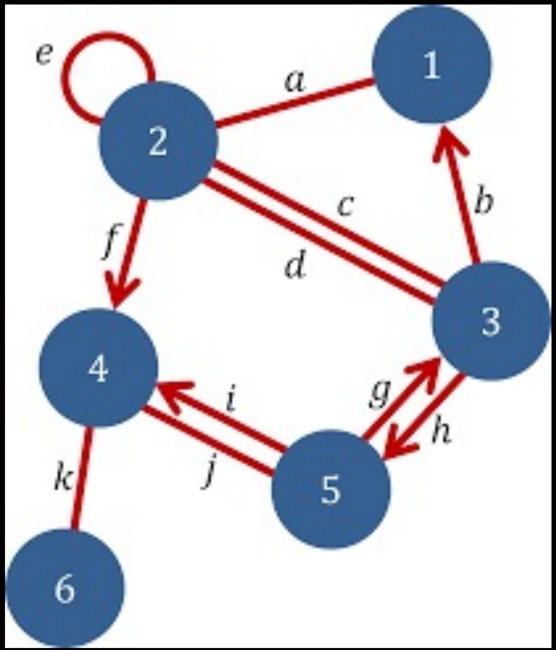
Introducción a Teoría de Gráficas

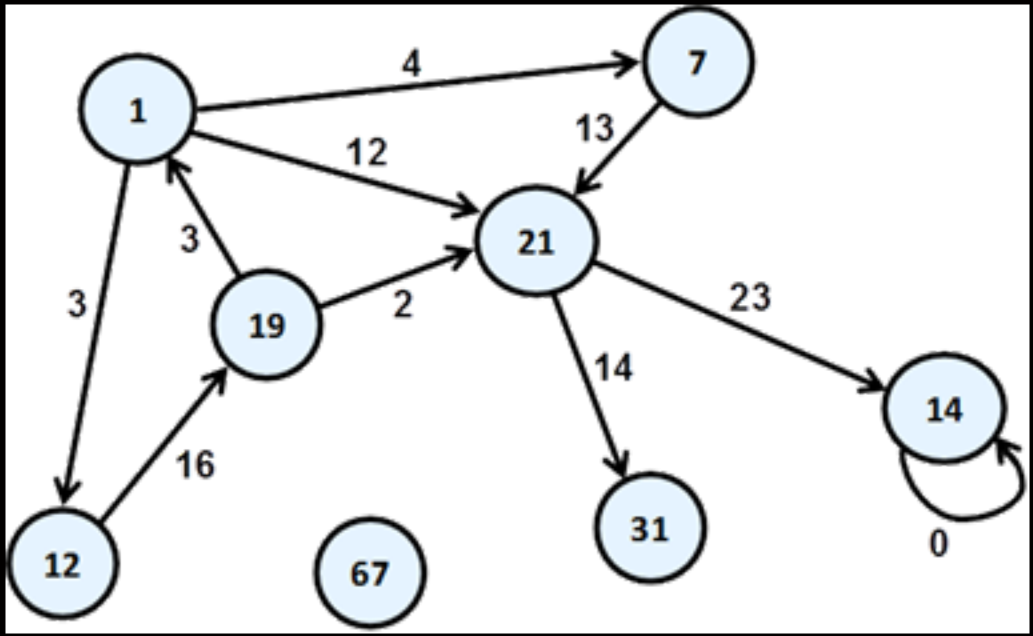
Teoría de Gráficas

- Esta teoría se encarga de trabajar con problemas qué tienen estructura de gráficas o redes. Pero, ¿qué es una gráfica o red (muchas referencias usan los términos intercambiablemente)? (mal llamadas grafos).
- Una gráfica consiste de una colección de vértices, o nodos, y de un conjunto de líneas qué unen a los nodos. Dichas líneas pueden ser dirigidas o no, las líneas dirigidas se conocen típicamente como enlaces o aristas.

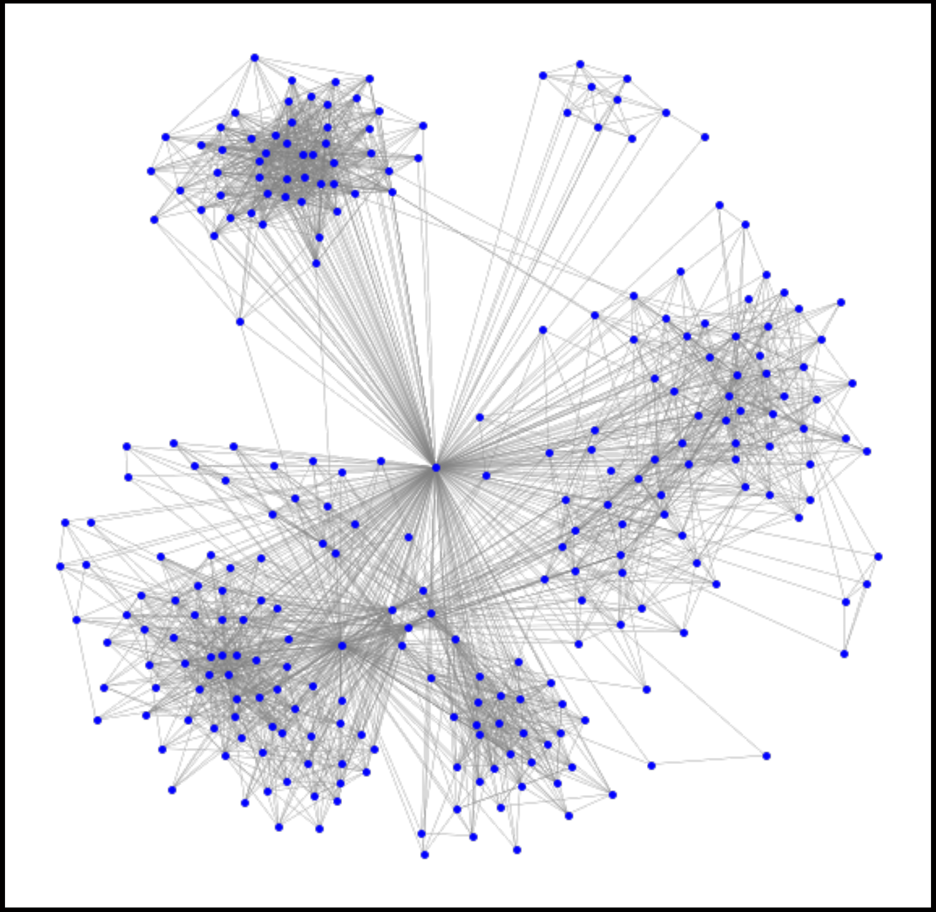
Ejemplo Gráfico





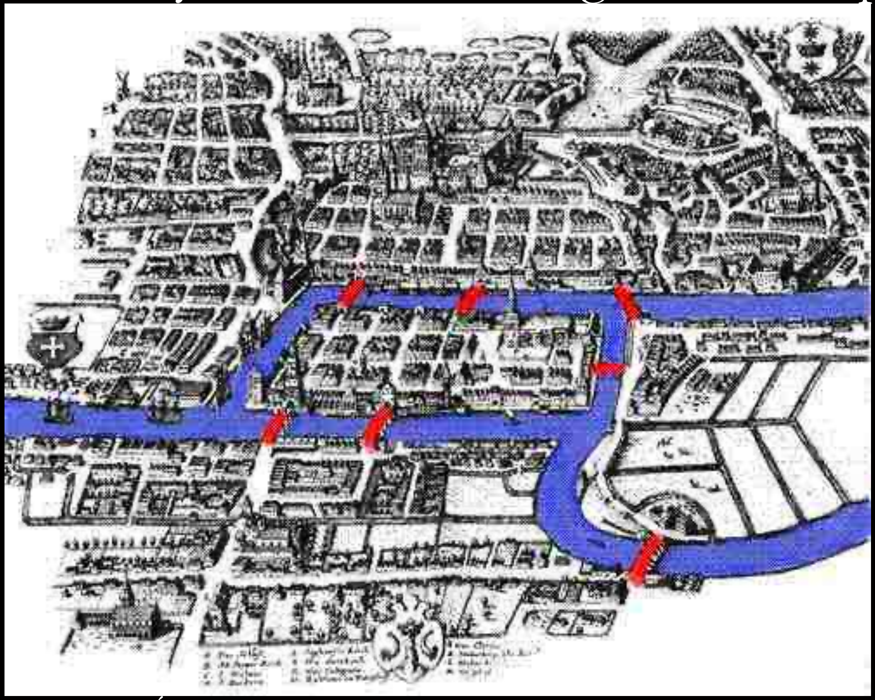


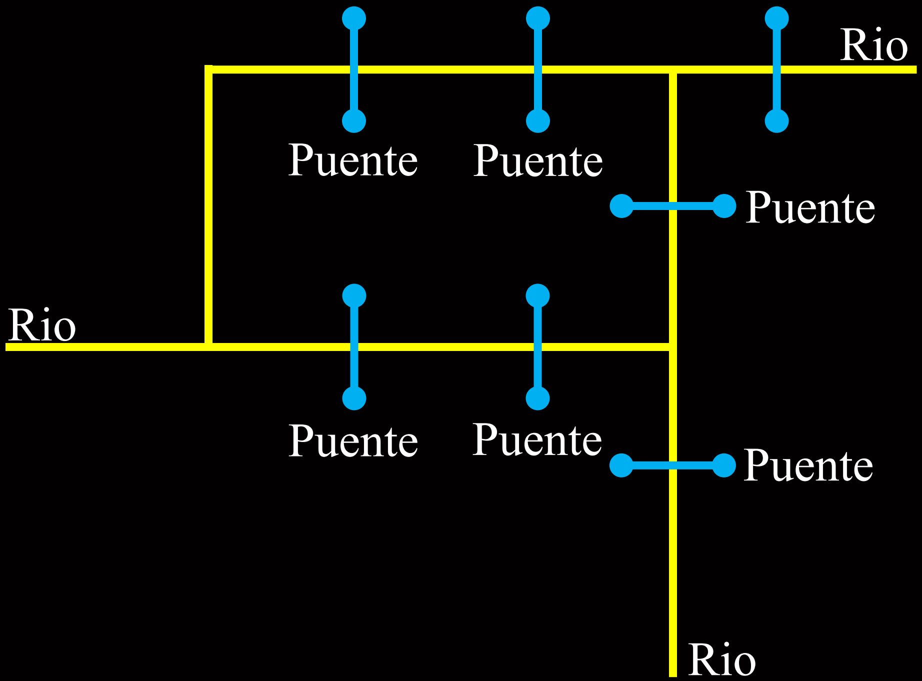
Ejemplo Gráfico



Anécdota Inicial

- La teoría de gráficas tiene una historia relativamente antigua en matemáticas clásicas. En 1736 Leonhard Euler resolvió, usando gráficas, el problema de si alguien podría cruzar los siete puentes sobre el rio Pregel (ver el mapa de debajo de la ciudad de Königsberg, Alemania) y regresar al punto en que esa persona ha iniciado el trayecto sin cruzar alguno de los puentes más de una vez.





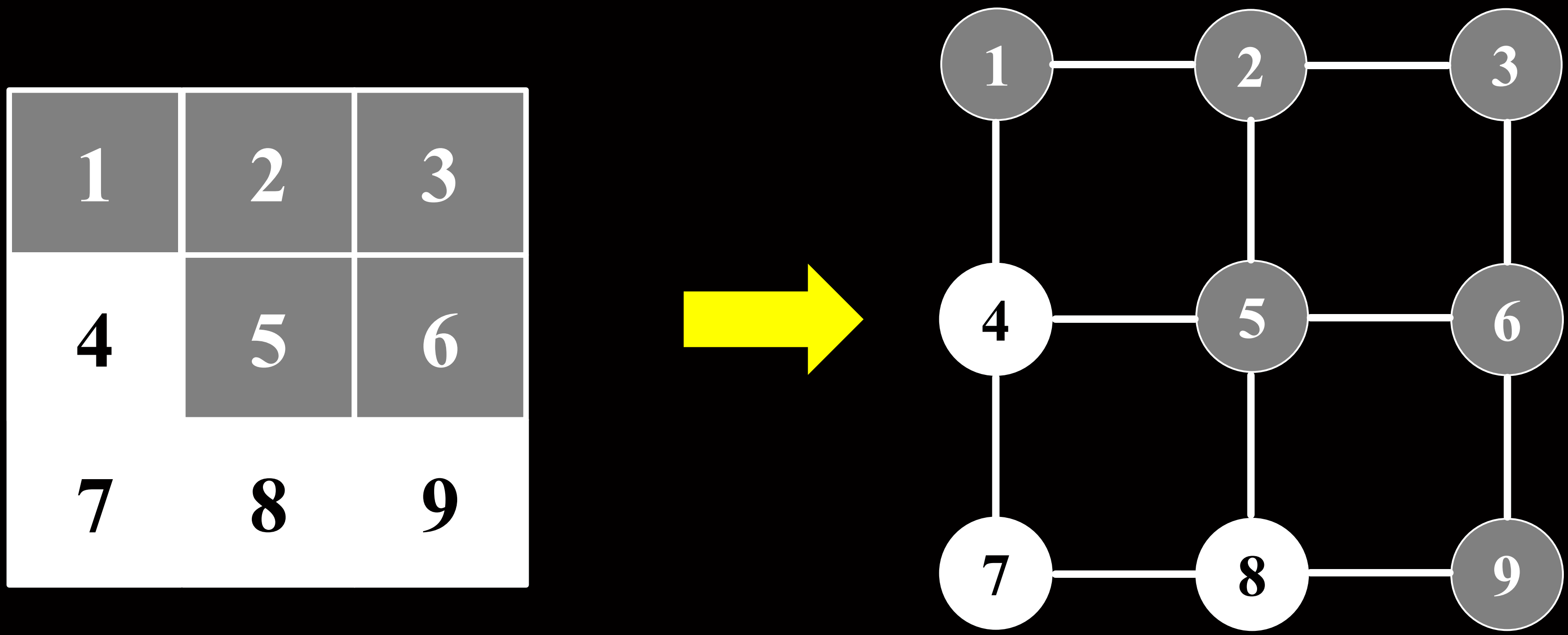
Anécdota Inicial

- El área de teoría de gráficas (algoritmos para resolver problemas de teoría de gráficas) se volvió prominente a mediados de los años 70s con el trabajo de Nicos Christofides.

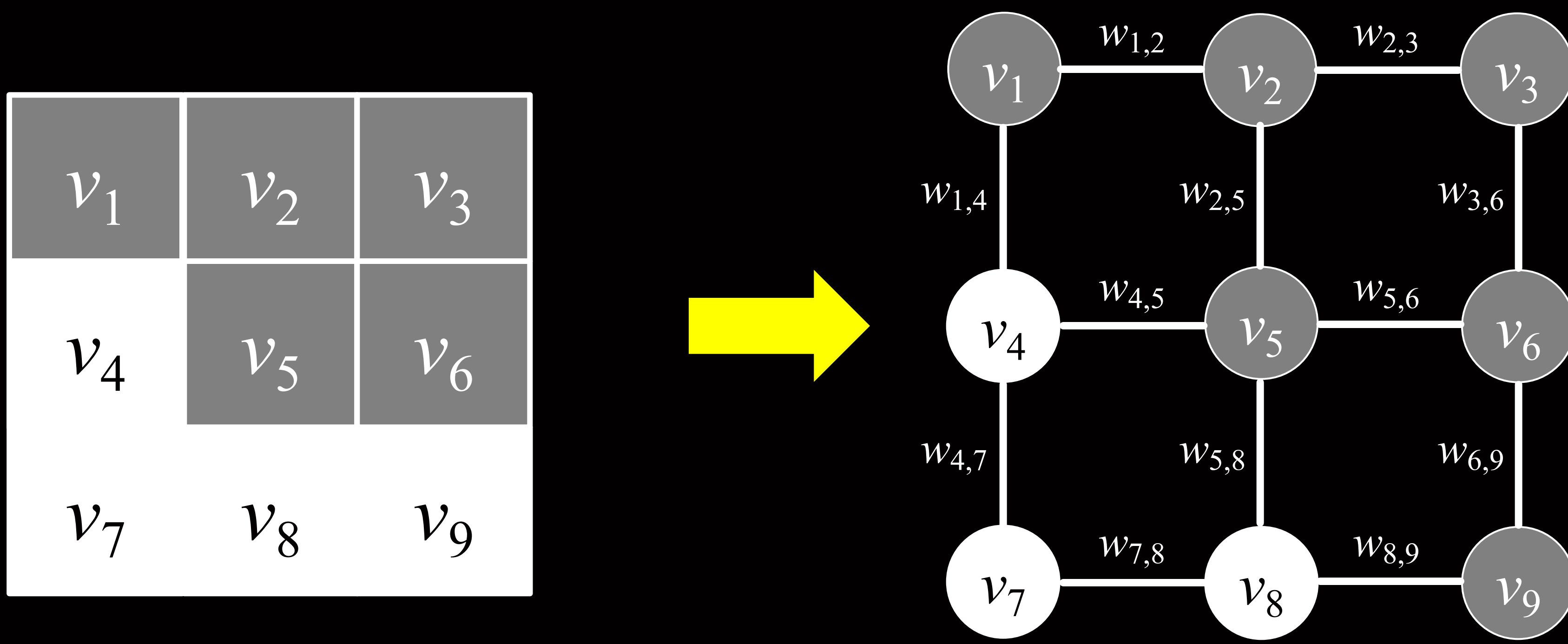
Representación de Imágenes

- Matemáticamente la definición es:
- Una gráfica $G(V, E)$ donde V representa al conjunto vértices (nodos), con cardinalidad $|V| = N$, y E al conjunto de arcos. Alternativamente, una gráfica se puede definir como $G(V, \mathbf{W})$ donde $\mathbf{W}$ es una matriz simétrica de dimensiones $N \times N$ que representa la adyacencia ponderada entre vértices; cuando $w_{i,j} > 0$ para el caso de que los vértices i y j se encuentren conectados por un arco y $w_{i,j} = 0$ en el caso contrario.
- Entonces, para representar una imagen 2D o 3D por medio de una gráfica G basta con indizar sus muestras como nodos para generar el conjunto V y crear la matriz $\mathbf{W}$ con la relación existente entre esos valores (por ejemplo, la distancia entre ellos). Alternativamente, la señal que ha sido muestreada y cuyas muestras se representan con el conjunto V del gráfico también se pueden representar por medio de un vector N-dimensional.

Representación de Imágenes



Representación de Imágenes



Rejillas Reciprocas

- Recordemos que un punto en $\mathbb{R}^n$ se representa por medio de la combinación lineal:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i = \bar{x} \longrightarrow \left[\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n\right]\bar{\alpha} = \bar{x} \longrightarrow \mathbf{E}\bar{\alpha} = \bar{x}$$

donde los vectores $\bar{e}_i$ son un conjunto de vectores base del espacio $\mathbb{R}^n$. Cabe notar que un punto en el espacio de Fourier (comúnmente llamado de la frecuencia) también se puede representar de forma similar:

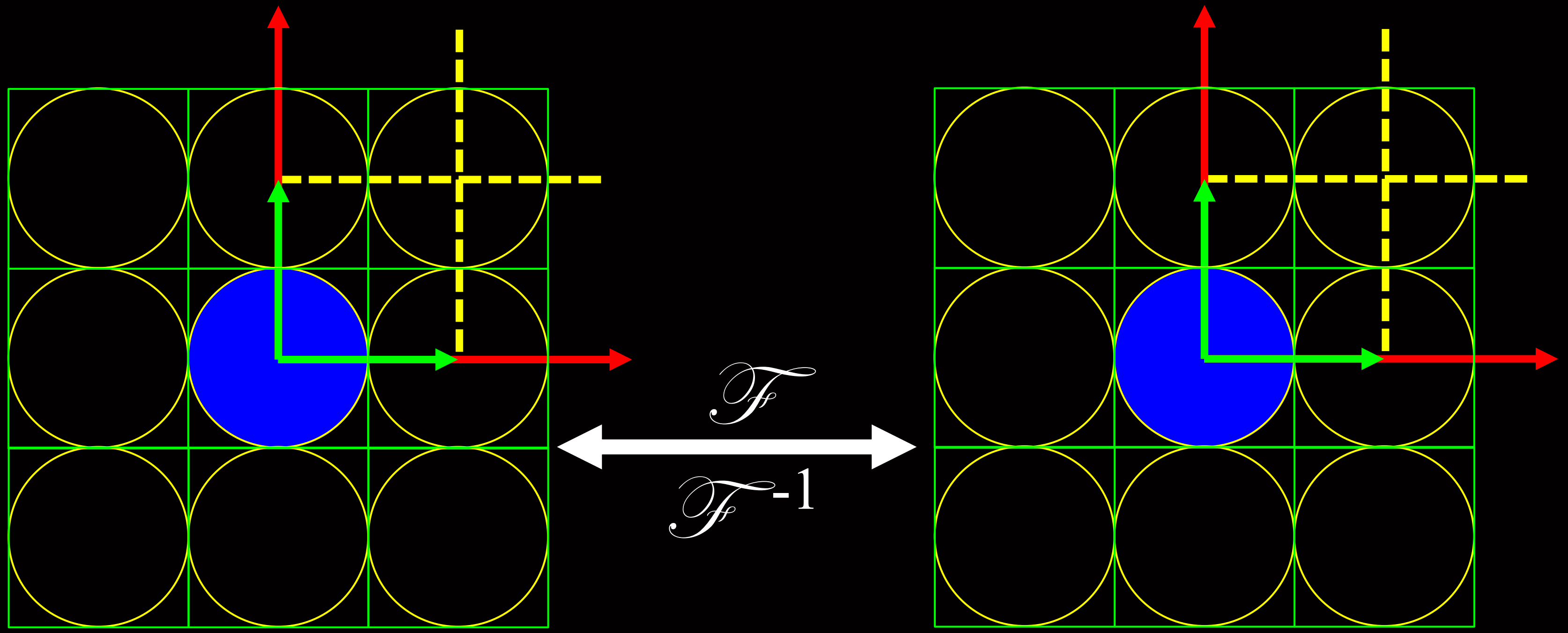
$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{o}_i = \bar{\xi} \longrightarrow [\bar{o}_1 \ldots \bar{o}_n]\bar{\beta} = \bar{\xi} \longrightarrow \mathbf{O}\bar{\beta} = \bar{\xi}$$

- El conjunto *V* de un espacio digital es típicamente una rejilla (una serie de puntos discretos en el espacio). Estos puntos tienen una naturaleza repetitiva (algo parecido a un cristal). Por lo tanto, los puntos forman un entramado (*lattice*) cristalino.
- Debido a que las imágenes más comunes son bi- y tri-dimensionales nos concentraremos en esos espacios.

Rejillas Reciprocas

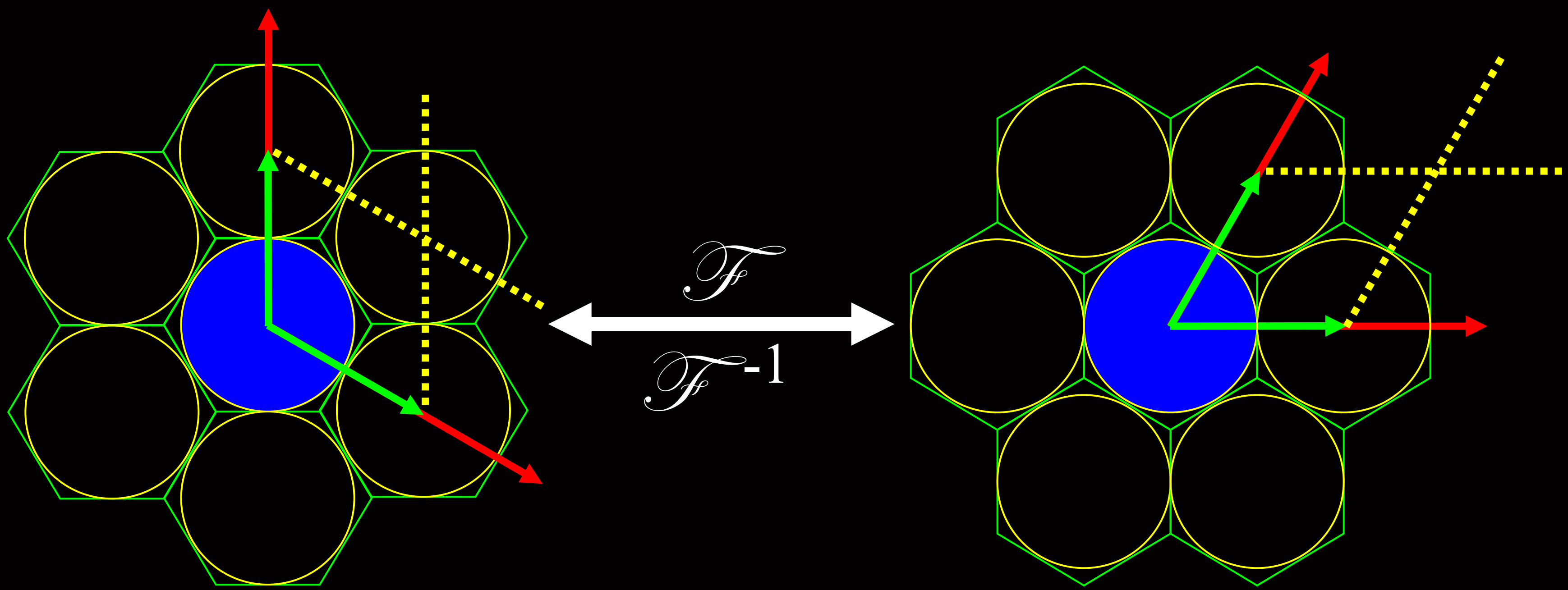
- Los vectores base $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ y $\overline{e}_3$ guardan la siguiente relación con los vectores base recíprocos $\overline{o}_1$, $\overline{o}_2$ y $\overline{o}_3$
$$\langle \overline{e}_i, \overline{o}_j \rangle = \begin{cases} 2\pi, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$
- Los vectores recíprocos se pueden obtener de la siguiente manera
$\overline{o}_1 = 2\pi \frac{\overline{e}_2 \times \overline{e}_3}{\langle \overline{e}_1, (\overline{e}_2 \times \overline{e}_3) \rangle}$, $\overline{o}_2 = 2\pi \frac{\overline{e}_3 \times \overline{e}_1}{\langle \overline{e}_1, (\overline{e}_2 \times \overline{e}_3) \rangle}$ y $\overline{o}_3 = 2\pi \frac{\overline{e}_1 \times \overline{e}_2}{\langle \overline{e}_1, (\overline{e}_2 \times \overline{e}_3) \rangle}$.
Hay que hacer notar que el valor de 2π depende de la definición de espacio de Fourier.
- Por lo tanto, los vectores base recíprocos se pueden definir como:
$\mathbf{E}^{-\mathrm{T}} = \mathbf{O} \;\therefore\; \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{O} = \mathbf{I}$ o $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{O} = 2\boldsymbol{\pi}\mathbf{I}$
- Los determinantes de ambas matrices determinan el volumen de los vóxeles en los espacios correspondientes.
- Los paralelepípedos del híper volumen de $|\mathbf{E}|$, definidos por los vectores de muestreo $\{\overline{e}_i\}$, contiene un, y únicamente un, punto de muestreo; por lo tanto, $1/|\mathbf{E}|$ puntos de muestreo son necesarios por unidad de híper volumen del espacio reciproco.

Rejilla Cuadrada



$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \vec{o}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{o}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Rejilla Hexagonal



$$\vec{e}_1 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Rejillas en 3D

- Las siguientes rejillas son de particular interés en 3D:
- La rejilla cúbica simple (*sc*), definida como

$$G_\Delta = \left\{ \Delta \bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3 \right\}$$

donde Δ es un numero real positivo (la distancia de muestreo).

- La rejilla cúbica centrada en el cuerpo (*bcc*), definida como

$$B_\Delta = \left\{ \Delta \bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3 \text{ and } k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \left(mod\ 2 \right) \right\}$$

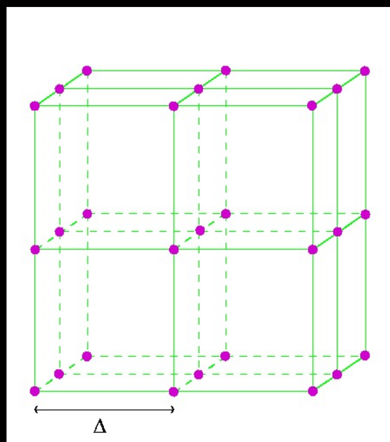
donde Δ es un numero real positivo.

- La rejilla cúbica centrada en la cara (*fcc*), definida como

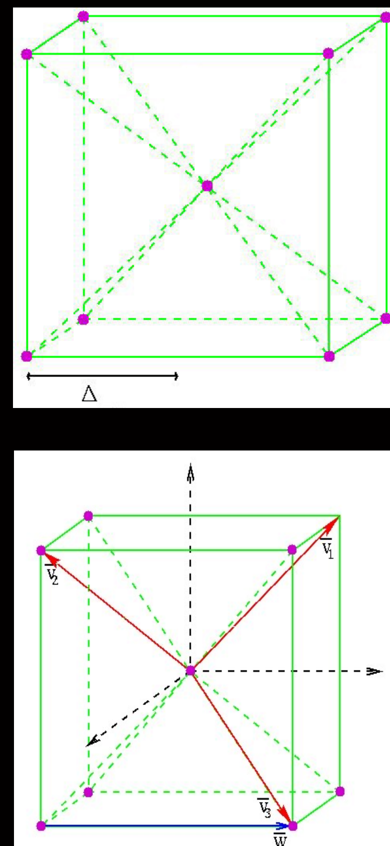
$$F_\Delta = \left\{ \Delta \bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3 \text{ and } k_1 + k_2 + k_3 \equiv 0 \left(mod\ 2 \right) \right\}$$

donde Δ es un numero real positivo.

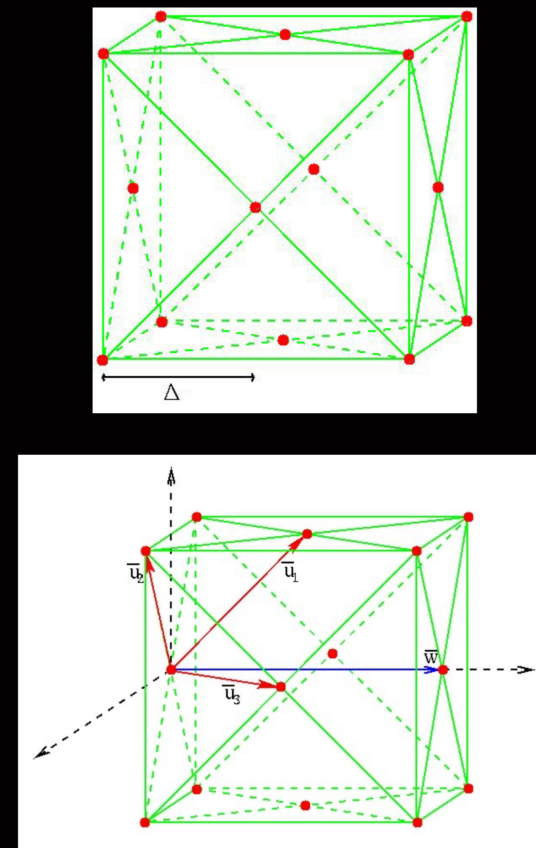
Rejillas *sc*, *bcc* y *fcc*



Cúbica Simple

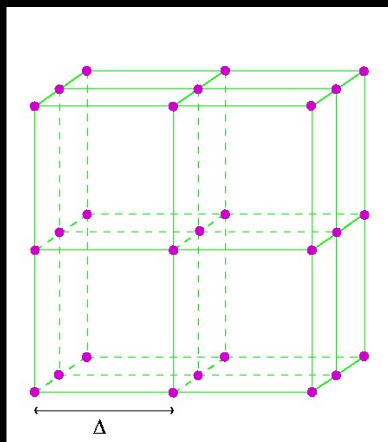


bcc

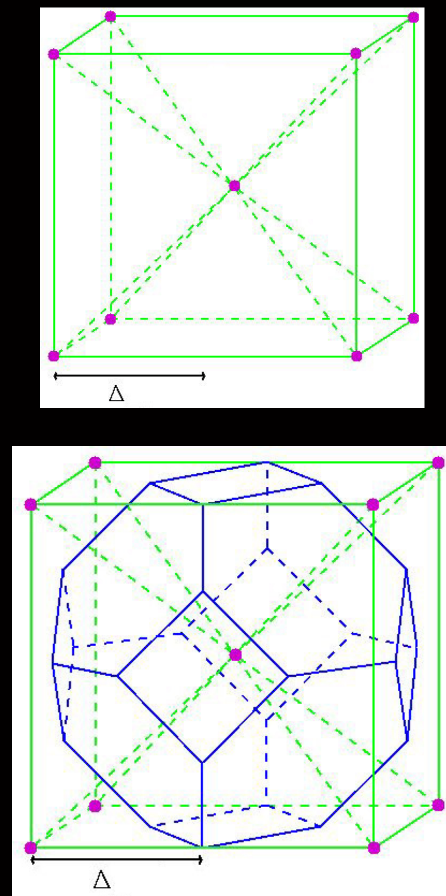


fcc

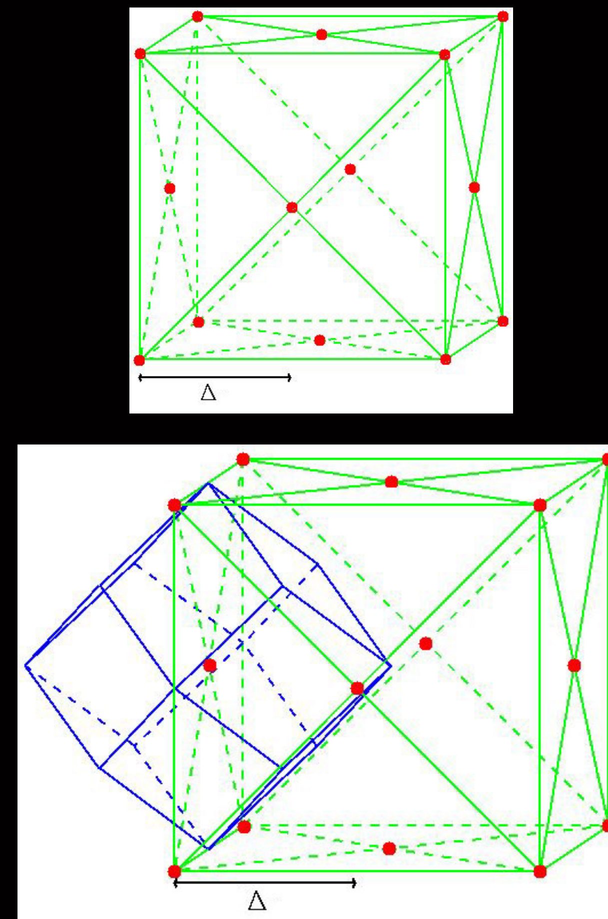
Vecindarios Voronoi de Rejillas *bcc* y *fcc*



Cúbica Simple

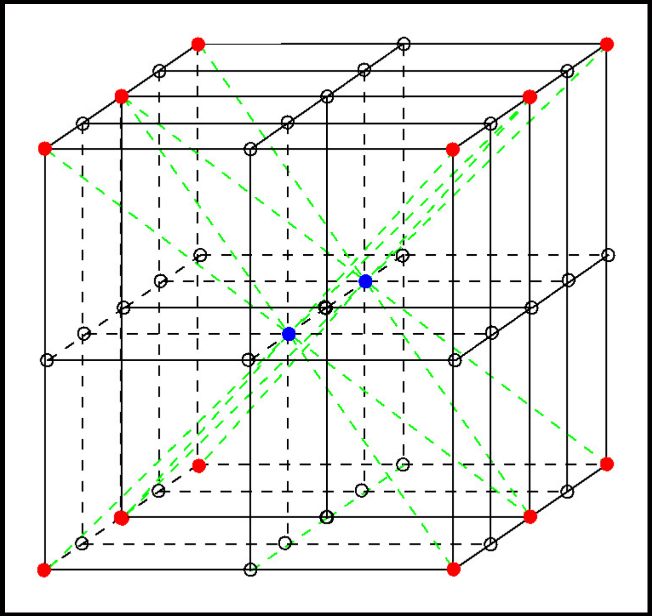


bcc

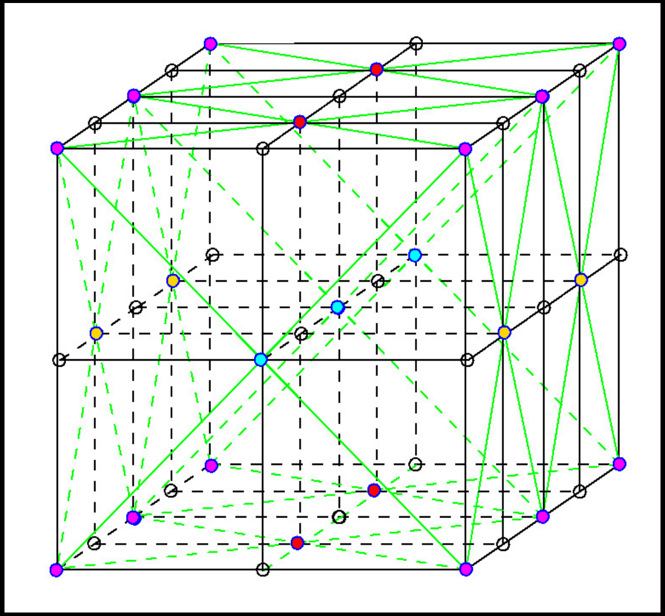


fcc

Representación de Rejillas *bcc* y *fcc* Como Sumas de Rejillas *sc*



bcc



fcc

$$\text{Ш}_{B_\Delta} = {}^{2\Delta}\text{shah} + {}^{2\Delta}\text{shah}_{\bar{b}}$$

$$\text{Ш}_{G_\Delta} = {}^{\Delta}\text{shah}$$

$$\text{Ш}_{F_\Delta} = {}^{2\Delta}\text{shah} + {}^{2\Delta}\text{shah}_{\bar{e}_1} + {}^{2\Delta}\text{shah}_{\bar{e}_2} + {}^{2\Delta}\text{shah}_{\bar{e}_3}$$