Rejillas en 3D

- Las siguientes rejillas son de particular interés en 3D:
- La rejilla cúbica simple (*sc*), definida como

$$G_\Delta = \left\{ \Delta \bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3 \right\}$$

donde Δ es un numero real positivo (la distancia de muestreo).

- La rejilla cúbica centrada en el cuerpo (*bcc*), definida como

$$B_\Delta = \left\{ \Delta \bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3 \text{ and } k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \left(mod\ 2 \right) \right\}$$

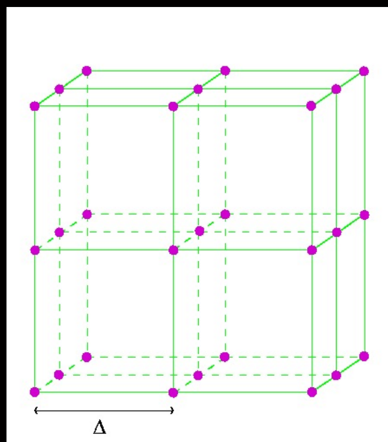
donde Δ es un numero real positivo.

- La rejilla cúbica centrada en la cara (*fcc*), definida como

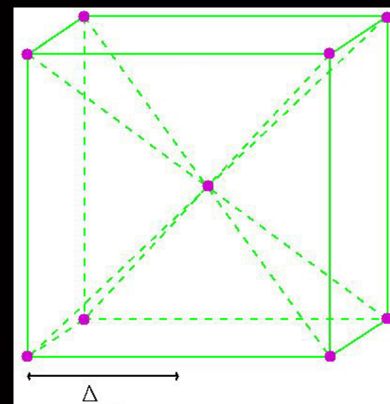
$$F_\Delta = \left\{ \Delta \bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3 \text{ and } k_1 + k_2 + k_3 \equiv 0 \left(mod\ 2 \right) \right\}$$

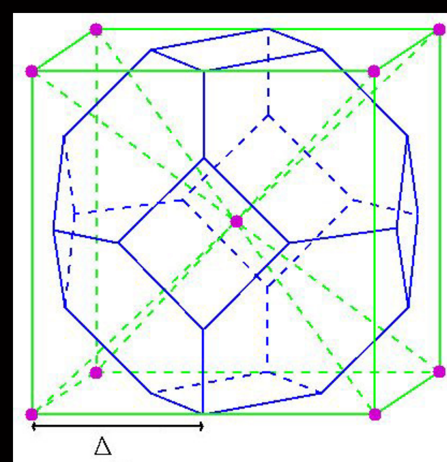
donde Δ es un numero real positivo.

Vecindarios Voronoi de Rejillas *bcc* y *fcc*

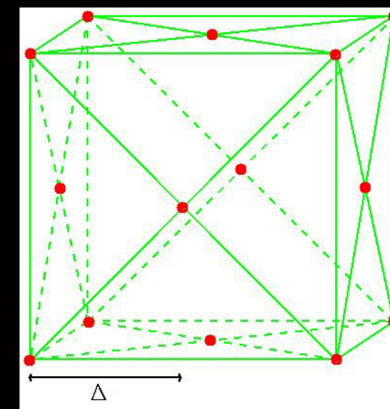


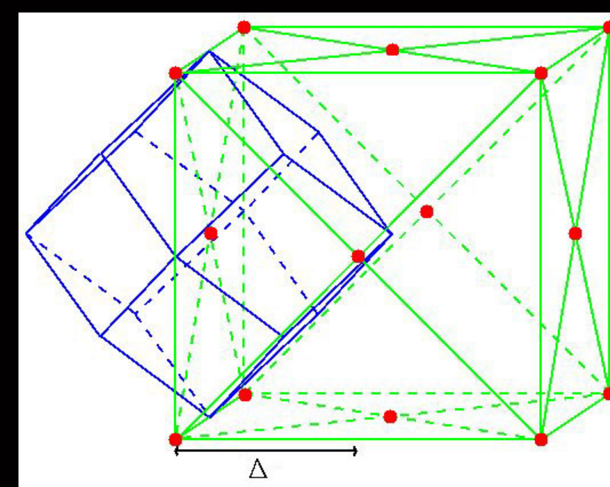
Cúbica Simple





bcc





fcc

Edgar Garduño Ángeles

C. Computación, I.I.M.A.S.

Adyacencias Para Rejillas *bcc* y *fcc*

- Para rejillas *fcc*:

$$\boxed{\left(\bar{u},\bar{v}\right)\in\varpi \Leftrightarrow \Delta \le \left|\bar{u}-\bar{v}\right| \le \sqrt{2}\,\Delta}$$

- Para rejillas *bcc*:

$$\boxed{\left(\bar{u},\bar{v}\right)\in\varphi \Leftrightarrow \sqrt{3}\,\Delta \le \left|\bar{u}-\bar{v}\right| \le 2\Delta}$$

Cristales Reales

- Estas estructuras no son solo una conveniencia matemática, existen en la naturaleza:
  - La estructura *bcc* se presenta en a-Fe, Na, K, b-Ti.
  - La estructura *fcc* se presenta en Cu, Au, Ag, Al, Pt, Pd, **NaCl**, **GaAs**, **Si, Ge**, **$SrTiO_3$**.

¿Por Qué Son Interesantes Estas Rejillas?

- Aunque para la rejilla *fcc* es posible definir una adyacencia vértice-cara, ambas rejillas *bcc* y *fcc* poseen una adyacencia de cara. Lo cual las hace atractivas desde el punto de vista de topología digital (Curva Jordan en Espacios Digitales).

- Sin embargo, la rejilla *fcc* tiene 12 vecinos a la misma distancia, lo cual la hace atractiva para procesamiento de imágenes. Por otra parte, la rejilla *bcc* tiene 14 vecinos a dos distancias diferentes, lo cual complica el manejo desde el punto de vista de procesamiento de imágenes.

- Sin embargo, se ha visto que la rejilla hexagonal en 2D es la mejor para muestrear en dicho espacio. ¿Qué hay acerca de las rejillas *bcc* y *fcc*?

Transformada de Fourier n-Dimensional

Series de Fourier

Series de Fourier (Recordatorio)

- Si una función $f(x)$ es una función periódica limitada de periodo $2T$ (i.e., $f(x + 2T) = f(x)$) y satisface las siguientes condiciones:
  - En cualquier periodo, $f(x)$ es continua, excepto quizás en un número finito de discontinuidades.
  - En cualquier periodo $f(x)$ tiene únicamente un número finito de máximos y mínimos.

Entonces, puede ser representada por series de Fourier:

donde $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right)$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \qquad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

Series de Fourier (Recordatorio)

- Escribiendo las funciones trigonométricas en términos de exponenciales complejos obtenemos:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$$

donde $\omega_n = \frac{n\pi}{T}$ y

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\left(x\right)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

Coeficientes Generalizados de Fourier

- Sea ϕ_n un conjunto ortonormal en L_2 y sea f en L_2. Los numeros

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx$$

son los coeficientes generalizados de Fourier de f con respecto al conjunto $\{\phi_n\}$, y la serie es la serie generalizada de Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

Demo Series de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$$

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-i\omega_n x}dx$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{T}$$