Elementos de Análisis de Funciones

Espacios de Funciones

- Las funciones se agrupan en espacios vectoriales de acuerdo a sus propiedades de "suavidad" o de tasa de desvanecimiento (caida). En todos los casos, normas y métricas se definen para estos espacios.
- Típicamente, para medir la suavidad de una función se usa el número de derivadas continuas que posee en un intervalo. Por ejemplo, $\mathcal{C}^k([0,1])$ representa el espacio vectorial de funciones, definidas en el intervalo $[0,1]$, con k derivadas continuas, y $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ representa el espacio vectorial de funciones, definidas en el intervalo $[0,1]$, con un número infinito de derivadas continuas.
- En cuanto a la tasa de desvanecimiento se compara la función con el comportamiento de otra función relativamente simple, tal como $|x|$ a cierta potencia. Una función $f(x)$ decae de forma similar a $|x|^{-\alpha}$ si existen las constantes σ y ρ tal que para una x con $|x|<\rho$ se tiene la estimación:

$$\left|f(x)\right| \leq \frac{\sigma}{|x|^\alpha}$$

Funciones Integrables

Funciones Absolutamente Integrables

- Sea una función $f\left(\overline{x}\right)$ definida en el espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$. La función es integrable absolutamente si

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(\overline{x}\right)\right|d\overline{x}<\infty.$$

- El conjunto de estas funciones es un espacio vectorial denotado por $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Funciones Integrables Cuadradamente

- Sea una función $f\left(\overline{x}\right)$ definida en el espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$. La función es integrable cuadradamente si

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

- El conjunto de estas funciones es un espacio vectorial denotado por $L^2(\mathbb{R})$.

Teoría de Funciones Generalizadas (Distribuciones)

- Definición: Una función generalizada (distribución) T es un mapeo lineal de un espacio de funciones prueba al conjunto de números reales o complejos. Por el momento escribimos Tf para describir el valor de T operando sobre una función f.
- Es importante notar que la función generalizada opera sobre toda la función y no sobre la función evaluada en un solo punto.
- En la teoría de funciones generalizadas, una función $f(x)$ se puede describir como una tabla de números. Los números se producen por la relación:

$$T_\phi f = F[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,dx \quad (2.1)$$

Teoría de Funciones Generalizadas (Distribuciones)

- Si la integral anterior esta definida para toda función $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (i.e., funciones que son infinitamente diferenciables y que decaen rápidamente - que pertenecen al espacio de *Schwartz*), entonces $T_\phi f$ está definida.
- La función $\phi(x)$ proviene de un espacio de funciones llamado el espacio de funciones prueba. La ecuación anterior representa un mapeo, para una función fija $f(x)$, del espacio de funciones prueba al conjunto de números reales o complejos. A tal mapeo, se le conoce como *funcional*.
- La función $f(x)$ puede ser descrita por una tabla de sus valores funcionales sobre un espacio de funciones prueba. Para ello es indispensable especificar dicho espacio.

Teoría de Funciones Generalizadas (Distribuciones)

- Si la función $\phi(x)$ también pertence al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces Tf esta definido y forma un espacio de funciones generalizadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Las funciones generalizadas son funcionales lineales continuos en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones generalizadas en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se denota por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
- Para una función $f(x)$ el funcional T_ϕ es lineal:

$$T_{(\alpha\phi_1+\beta\phi_2)}f = \alpha T_{\phi_1} f + \beta T_{\phi_2} f$$

Funciones Especiales

Paul Adrien Maurice Dirac

La Función Delta de Dirac

- Cuando la función $\phi(x)$ es integrable cuadradamente y de incremento lento, entonces la función $\phi(x)$ es una función generalizada y la notación del lado izquierdo de la integral (2.1) puede ser remplazada por su notación en la derecha. Dicha notación se puede extender a otras funciones generalizadas, que resultan en formulas tales como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\bar{x}) f(\bar{x}) d\bar{x} = f(\bar{0})$$

donde $\delta(\bar{x})$ se conoce como la Delta de Dirac, y es una función normalizada:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\bar{x}) d\bar{x} = 1$$

Propiedades de la Función Delta de Dirac

- Traslación: Para cualquier función f definida sobre $\mathbb{R}^n$ y un vector $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $f_{\bar{y}}$ denota la función sobre $\mathbb{R}^n$ definida por $f_{\bar{y}}\left(\bar{x}\right) = f\left(\bar{x} - \bar{y}\right)$. Entonces, para la función $\phi \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y un vector cualquiera $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\phi_{\bar{y}}$ denota la función que está definida por $\phi_{\bar{y}} f = \phi f_{-\bar{y}}$, para cualquier f definida en $\mathbb{R}^n$:

$$\phi_{\bar{y}} f = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{\bar{y}}\left(\bar{x}\right) f\left(\bar{x}\right) d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\bar{x} - \bar{y}\right) f\left(\bar{x}\right) d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\bar{z}\right) f\left(\bar{z} + y\right) d\bar{z} = \phi f_{-\bar{y}}$$

Propiedades de la Función Delta de Dirac

- Valor: $\delta(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{x} \neq \bar{0}, \\ \infty, & \text{si } \bar{x} = \bar{0}. \end{cases}$
- Simetría: $\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = \delta(\bar{x}_0 - \bar{x})$
- Producto: $\delta(\bar{x} - \bar{x}_1)\,\delta(\bar{x} - \bar{x}_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2, \\ \text{indefinida}, & \text{si } \bar{x}_1 = \bar{x}_2. \end{cases}$
- Argumento Lineal: $\delta\left(\frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{T}\right) = |T|\,\delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$

Extensión de Multiplicación Puntual de Funciones

- El concepto de multiplicación puntual de dos funciones se puede extender a la multiplicación de una función $f \in S(\mathbb{R}^n)$ por una función generalizada $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, que se define como la distribución $f \times T$:

$$(f \times T)g = T(f \times g)$$

- Para cualquier función $g \in S(\mathbb{R}^n)$ y para una función ϕ sobre $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$(f \times T_\phi)g = T_\phi(f \times g) = T_\phi \times fg$$

Función Shah Regular (Tren de Impulsos)

- Para $T = \delta_{\overline{y}}$ se tiene que:
  $$\left(f \times \delta_{\overline{y}} \right) g = \delta_{\overline{y}} \left(f \times g \right) = f\left(\overline{y}\right) g\left(\overline{y}\right) = \left(f\left(\overline{y}\right) \delta_{\overline{y}} \right) g$$
- Si definimos G como un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$, podemos definir la función generalizada

$$\text{III}_G f = \sum_{\overline{y} \in G} f\left(\overline{y}\right)$$

o en otras palabras:

$$\text{III}_G = \sum_{\overline{y} \in G} \delta_{\overline{y}}$$

Análisis de Fourier

Análisis de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier

Funciones Base en L^2

- Dos funciones $f, g \in L^2[a,b]$ son ortogonales si
$$\int_a^b fg = 0.$$
- Un conjunto $\{\phi_i\}$ de funciones en $L^2[a,b]$ son ortogonales si $\int_a^b \phi_i \phi_j = 0$, para $i \neq j$.
- El conjunto es ortonormal si cada función tiene norma igual a 1 ($\|\phi_i\|_2 = 1$).
- Por ejemplo las funciones $\{\sin(nx)\}$ y $\left\{\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}$ son ortonormales en $(-\pi,\pi)$.

La Función Exponencial Compleja

- La pieza central de la transformada de Fourier es la función exponencial compleja . Esta función se define como la solución de la ecuación diferencial e^{ix}.
- El Teorema de De Moivre expresa el exponencial complejo en términos de funciones trigonométricas:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

- Algunas de las propiedades de la función exponencial son:
  - $\left|e^{ix}\right|^2 = \cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x) = 1$
  - $e^{i(x+y)} = e^{ix} + e^{iy}$
  - $\left(e^{ix}\right)^{-1} = e^{-ix}$ y $\left(e^{ix}\right)^{*} = e^{-ix}$
- La función exponencial esta ligada íntimamente a coordenadas polares: $r\left(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)\right) = re^{ix}$

La Transformada de Fourier

- Una característica muy importante de la transformada de Fourier es que su teoría es *independiente* de la dimensión.
- Definición: La transformada de Fourier de una función absolutamente integrable f, definida en $\mathbb{R}^n$, es la función $\widehat{f}$ definida en $\mathbb{R}^n$ por la siguiente integral:

$$\widehat{f}\left(\overline{\xi}\right) = \mathcal{F}\left\{f\left(\overline{x}\right)\right\} = \left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\overline{x}\right) e^{-i\left\langle \overline{x}, \overline{\xi} \right\rangle} \, d\overline{x}$$

- Una propiedad básica de la transformada de Fourier es que la función $f\left(\overline{x}\right)$ puede ser "reconstruida" a partir de la función $\widehat{f}\left(\overline{\xi}\right)$.
- Teorema (Formula de Inversión de Fourier):

  Supóngase que la función $f\left(\overline{x}\right)$ es absolutamente integrable de forma tal que la función $\widehat{f}\left(\overline{\xi}\right)$ es también absolutamente integrable, entonces

$$f\left(\overline{x}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\widehat{f}\left(\overline{\xi}\right)\right\} = \left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\overline{\xi}\right) e^{i\left\langle \overline{x}, \overline{\xi} \right\rangle} \, d\overline{\xi}$$

Más Sobre la Transformada de Fourier

- Existen varias definiciones en la literatura sobre la transformada de Fourier, en particular en áreas de Ingeniería se usa la siguiente notación:

$$\widehat{f}\left(\overline{\xi}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\overline{x}\right)e^{-i2\pi\left\langle \overline{x},\overline{\xi}\right\rangle}\,d\overline{x}$$

solo es cuestión de hacer un cambio de variable.

- La simetría que el par de transformadas de Fourier exhiben está detrás de muchas de sus propiedades.

- Vale la pena notar que el hecho de que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ no implica que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Una condición mas usual es que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Como consecuencia, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces también $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

La Formula de Plancherel

- Teorema (Formula de Plancherel): Si $f\left(\bar{x}\right)$ es absolutamente y cuadradamente integrable, entonces $\hat{f}\left(\bar{\xi}\right)$ también es cuadradamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(\bar{x}\right)\right|^2 d\bar{x} = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(\bar{\xi}\right)\right|^2 d\bar{\xi}$$

- La formula en el Teorema anterior usualmente se interpreta como que la energía total de f es igual a la de $\hat{f}$.

La Relación de Perseval

- Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces tambíén $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y la relación de Perseval es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}\, g\, d\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f\, \widehat{g}\, d\overline{x}$$

Propiedades Básicas de la Transformada de Fourier

- Operador Lineal: $\widehat{f+g}=\hat{f}+\hat{g}, \quad \widehat{\alpha f}=\alpha\hat{f}, \alpha\in\mathbb{C}$
- Ambos espacios son espacios de Hilbert. Ambos productos punto están relacionados: $\left\langle f,g\right\rangle=\left\langle \hat{f},\hat{g}\right\rangle$
- Escalamiento en el Dominio: $\mathcal{F}\left\{f\left(r\bar{x}\right)\right\}=\frac{1}{r^n}\hat{f}\left(\frac{\bar{\xi}}{r}\right)$
- Traslación en el Dominio:

Si $f_{\bar{y}}\left(\bar{x}\right)=f\left(\bar{x}+\bar{y}\right)$, para $\bar{y}\in\mathbb{R}^n$, entonces $\hat{f}_{\bar{y}}\left(\bar{\xi}\right)=e^{i\left\langle\bar{\xi},\bar{y}\right\rangle}\hat{f}\left(\bar{\xi}\right)$

- Derivación, $k=(k_1,\ldots,k_n)$, para enteros $k_i\geq 0$:

$$\widehat{\left(D^k f\right)}\left(\bar{\xi}\right)=i^{|k|}\bar{\xi}^k\hat{f}\left(\bar{\xi}\right), \widehat{\left(x^k f\right)}=i^{|k|}D^k\hat{f}$$

donde $D^k=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1},\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_n}, x^k=x_1^{k_1},\ldots,x_n^{k_n}, |k|=k_1+\ldots+k_n$