Propiedades Básicas de la Transformada de Fourier

- Operador Lineal: $\widehat{f+g}=\hat{f}+\hat{g},\quad \widehat{\alpha f}=\alpha\hat{f}, \alpha\in\mathbb{C}$
- Ambos espacios son espacios de Hilbert. Ambos productos punto están relacionados: $\langle f,g\rangle=\langle\hat{f},\hat{g}\rangle$
- Escalamiento en el Dominio: $\mathcal{F}\left\{f\left(r\bar{x}\right)\right\}=\frac{1}{r^n}\hat{f}\left(\frac{\bar{\xi}}{r}\right)$
- Traslación en el Dominio:

Si $f_{\bar{y}}\left(\bar{x}\right)=f\left(\bar{x}+\bar{y}\right)$, para $\bar{y}\in\mathbb{R}^n$, entonces $\hat{f}_{\bar{y}}\left(\bar{\xi}\right)=e^{i\langle\bar{\xi},\bar{y}\rangle}\hat{f}\left(\bar{\xi}\right)$

- Derivación, $k=(k_1,\ldots,k_n)$, para enteros $k_i\geq 0$:

$$\widehat{\left(D^k f\right)}\left(\bar{\xi}\right)=i^{|k|}\bar{\xi}^k\hat{f}\left(\bar{\xi}\right),\ \widehat{\left(x^k f\right)}=i^{|k|}D^k\hat{f}$$

donde $D^k=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1},\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_n}, x^k=x_1^{k_1},\ldots,x_n^{k_n}, |k|=k_1+\ldots+k_n$

Propiedades Básicas de la Transformada de Fourier (II)

- Si f es una función con valores reales, entonces su transformada de Fourier satisface: $\hat{f}(\bar{\xi}) = \hat{f}^*(-\bar{\xi})$
- Si $f(\bar{x}) = f(-\bar{x})$ entonces $\hat{f}(\bar{\xi})$ es real, si $f(\bar{x}) = -f(-\bar{x})$ entonces $\hat{f}(\bar{\xi})$ es puramente imaginaria.
- La Transformada de Fourier es inyectiva.
- Asumiendo que supp $f \subset (-R, R)$, si $\hat{f}$ también tiene soporte limitado, entonces $f \equiv 0$. Esto implica que si una función se desvanece fuera de un intervalo limitado, entonces su transformada de Fourier no lo hace.

La Transformada de Fourier para Función Generalizadas

- La transformada de Fourier se puede extender a una función generalizada T como sigue: $\widehat{T}$ es la función generalizada tal que $f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\widehat{T}f = T\widehat{f}$. Esta definición es consistente con $T_\phi f = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\overline{x}) f(\overline{x}) d\overline{x}$, de forma tal que cualquier $\phi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\widehat{T_\phi} = T_{\hat{\phi}}$.
- La inversa de una función generalizada T está dada por $\breve{T}f = T\breve{f}$

La Función Delta de Dirac Revisitada

- Para cualquier $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, la función sinusoidal $S^{\bar{y}}$ se define por $S^{\bar{y}} = e^{-i\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}$, para cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Vale la pena hacer notar que $S^{\bar{0}} = 1$.
- Con la teoría que se ha visto en clase es posible derivar que $\widehat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} S^{\bar{0}}$.

La Función Delta de Dirac Revisitada

- Para cualquier $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, la función sinusoidal $S^{\bar{y}}$ se define por $S^{\bar{y}} = e^{-i\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}$, para cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Vale la pena hacer notar que $S^{\bar{0}} = 1$.
- Con la teoría que se ha visto en clase es posible derivar que

$$\hat{\delta}(\bar{\xi}) = \mathcal{F}\{\delta(\bar{x})\} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{x}) e^{-i\langle \bar{x}, \bar{\xi} \rangle} \, d\bar{x} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} S^{\bar{0}}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\bar{x}) f(\bar{x}) \, d\bar{x} = f(\bar{0})$$

La Función Delta de Dirac Revisitada

- Ahora, para la función delta δ con un traslado $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ ($\delta_{\overline{y}}(\overline{x}) = \delta(\overline{x} - \overline{y})$) tenemos

$$\widehat{\delta_{\overline{y}}}(\overline{x}) = \mathcal{F}\{\delta_{\overline{y}}(\overline{x})\} = \hat{\delta}(\overline{\xi})e^{i\langle\overline{y},\overline{\xi}\rangle} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left[S^{\overline{0}} \times e^{i\langle\overline{y},\overline{\xi}\rangle}\right]$$

- Esto implica que para el tren de pulsos (también conocido como peine o *comb*) es

$$\widehat{\text{Ш}_{G_\Delta}} = \mathcal{F}\{\text{Ш}_{G_\Delta}\} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\overline{y} \in G_\Delta} e^{i\langle\overline{y},\overline{\xi}\rangle} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\overline{k} \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle\Delta\overline{k},\overline{\xi}\rangle}$$

Donde los elementos ξ_i es de la forma αl_i y para que la función $e^{i\langle\Delta\overline{k},\overline{\xi}\rangle}$ sea igual a uno se necesita que $\Delta\langle\overline{k},\overline{y}\rangle = \Delta\langle\overline{k},\alpha\overline{l}\rangle$ sea igual a uno lo que implica que $\alpha = \frac{2\pi}{\Delta}$. En ese caso, se tiene que

$$\widehat{\text{Ш}_{G_\Delta}} = (2\pi)^{-n/2}\beta\text{Ш}_{G_{\frac{2\pi}{\Delta}}} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta}\right)^n \text{Ш}_{G_{\frac{2\pi}{\Delta}}}$$

$$\beta = \left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^n$$

La Función Delta de Dirac Revisitada

- Regresando a la definición de las transformadas de Fourier

$$\hat{f}(\bar{\xi}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{x}) e^{-i\langle \bar{x}, \bar{\xi} \rangle} d\bar{x}$$

$$f(\bar{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\bar{\xi}) e^{i\langle \bar{x}, \bar{\xi} \rangle} d\bar{\xi}$$

con $f(\bar{x}) = \delta(\bar{x})$ y $\hat{f}(\bar{\xi}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} S^{\bar{0}}$, entonces

La Función Delta de Dirac Revisitada

$$\delta(\overline{x}) = (2\pi)^{-n} S^{\overline{0}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \overline{x}, \overline{\xi} \rangle} d\overline{\xi}$$

considerando $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y}$, entonces

$$\delta_{\overline{y}} = (2\pi)^{-n} S^{\overline{0}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \overline{x}-\overline{y}, \overline{\xi} \rangle} d\overline{\xi}$$

A estas ecuaciones se les conoce como las representaciones integrales de la función Delta de Dirac; es importante resaltar que la integración es sobre $\overline{\xi}$.

Equivalencias entre Definiciones de Transformadas de Fourier

- Existen varias definiciones de la Transformada de Fourier y por conveniencia estas son las equivalencias entre algunas de ellas:

$$\mathcal{F}_a\left\{f\left(x\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) e^{-i2\pi x\xi}\,dx \qquad \mathcal{F}_b\left\{f\left(y\right)\right\} = \left(2\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y\right) e^{-iy\xi}\,dy$$

$$\mathcal{F}_a = \left(2\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}_b\left\{f\left(\tfrac{x}{2\pi}\right)\right\} \qquad \mathcal{F}_b = \left(2\pi\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}_a\left\{f\left(2\pi x\right)\right\}$$

$$\widehat{f}_a\left(\xi\right) = \left(2\pi\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{f}_b\left(2\pi\xi\right) \qquad \widehat{f}_b\left(\xi\right) = \left(2\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \widehat{f}_a\left(\tfrac{\xi}{2\pi}\right)$$

Convolución

Convolución

- **Definición:** Para dos funciones integrables f y g, el producto de convolución se define como

$$f * g\left(\bar{x}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\bar{y}\right) g\left(\bar{x} - \bar{y}\right) d\bar{y}$$

- En análisis de sistemas, para caracterizar un sistema lineal e invariante a desplazamientos es solo necesario medir como responde el sistema a un impulso unitario. A esta respuesta se le llama función respuesta al impulso del sistema. Una vez medida esta función, es posible, en principio, predecir como responderá el sistema a cualquier otro estimulo.
- Una convolución es una integral que expresa la cantidad de solapamiento de una función g al ser trasladada sobre otra función f. Por lo tanto, matiza (combina) una función con otra.
- El resultado de la integral de convolución, también es una función integrable:

$$\int \left| f\left(\bar{x}\right) * g\left(\bar{x}\right) \right| d\bar{x} = \int \left| f\left(\bar{x}\right) \right| d\bar{x} \int \left| g\left(\bar{x}\right) \right| d\bar{x}$$

Convolución y Fourier

- Una propiedad básica de la integral de convolución es que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones se expresa en términos de Fourier como sigue:

$$\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f} \times \hat{g} \quad \text{y} \quad \widehat{(f \times g)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} * \hat{g}$$

Propiedades de la Integral de Convolución

- Conmutatividad: $f * g = g * f$
- Asociatividad:

$$\left(f * g\right) * h = f * \left(g * h\right), f * \left(g + h\right) = f * g + f * h$$

- Si f es integrable y g tiene k derivadas integrables, entonces $f*g$ también tiene k derivadas integrables:

$$D^a\left(f * g\right) = f * \left(D^a g\right)$$

$$D^a = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_n}, x^a = x_1^{a_1}, \ldots, x_n^{a_n}, \left|a\right| = a_1 + \ldots + a_n \leq k$$

Suavizando Funciones

- Usando la integral de convolución es posible crear la versión suavizada de una función dada.
- Supongamos una función φ tal que cumple con: $\int \varphi(x)\,dx = 1$. La función escalada en el dominio se define como $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. La integral $\int \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$ para cualquier ε. Por la propiedad de diferenciación de la integral de convoución, $\varphi_\varepsilon * f$ es infinitamente diferenciable. Es facil comprobar que:

$$\widehat{\varphi_\varepsilon * f} = \hat{f}, \text{ conforme } \varepsilon \to 0$$

Convolución con la Delta de Dirac

- Si f es una función localmente integrable, entonces:

$$\delta\left(\bar{x}\right) * f\left(\bar{x}\right) = f\left(\bar{x}\right)$$

- Nota: Si $\varphi * f = f$ entonces $\widehat{\varphi}\widehat{f} = \widehat{f}$ para toda $f \in L^1\left(\mathbb{R}\right)$ y toda $\bar{\xi}$. Esto implica que $\widehat{\varphi} = 1$ para toda $\bar{\xi}$ y que φ no puede ser una función integrable.

Teoría de Muestreo

Muestreo

- Para el desarrollo matemático es posible usar los espacios continuos. Sin embargo, en aplicaciones solo se cuenta con una colección finita de números y de mediciones.
- Definición: Supóngase que f es una función definida en el intervalo (a,b) y $\{\bar{x}_j\}$ es una secuencia discreta de puntos en (a,b). La secuencia de puntos $\{\bar{x}_j\}$ se conoce como puntos muestra. Los valores $\{f(\bar{x}_j)\}$ son las muestras de f en los puntos $\{\bar{x}_j\}$. Evaluar una función en un conjunto discreto de puntos muestra se conoce como muestreo.
- El muestreo provee un modelo matemático para hacer mediciones. En la mayoría de las aplicaciones el conjunto de puntos muestra es de la forma $G_\Delta=\{\Delta\bar{k} \mid \bar{k}\in\mathbb{Z}^n\}$. Estos son puntos muestra equidistantes, y al número $\Delta \in\mathbb{R}^+$ se le conoce como distancia de muestreo. El conjunto G_Δ se le conoce como rejilla cúbica.

Modelo Matemático Básico del Muestreo

- El muestreo de una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se puede llevar a cabo multiplicando la función f por un tren de pulsos cuyos puntos pertenecen al conjunto G_Δ:

$$Ш_{G_\Delta} f = Ш_{G_\Delta} \times f = \sum_{\bar{y} \in G_\Delta} f(\bar{y})$$

- Usando la teoría que hemos visto antes

$$\widehat{Ш_{G_\Delta}} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta}\right)^n Ш_{G_{\frac{2\pi}{\Delta}}}$$

- Por lo tanto, la Transformada de Fourier de una función muestreada esta definida por:

$$Ш_{G_\Delta} f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\bar{y} \in G_\Delta} f(\bar{y})\right] e^{-i\langle \bar{y}, \bar{\xi} \rangle} d\bar{y}$$

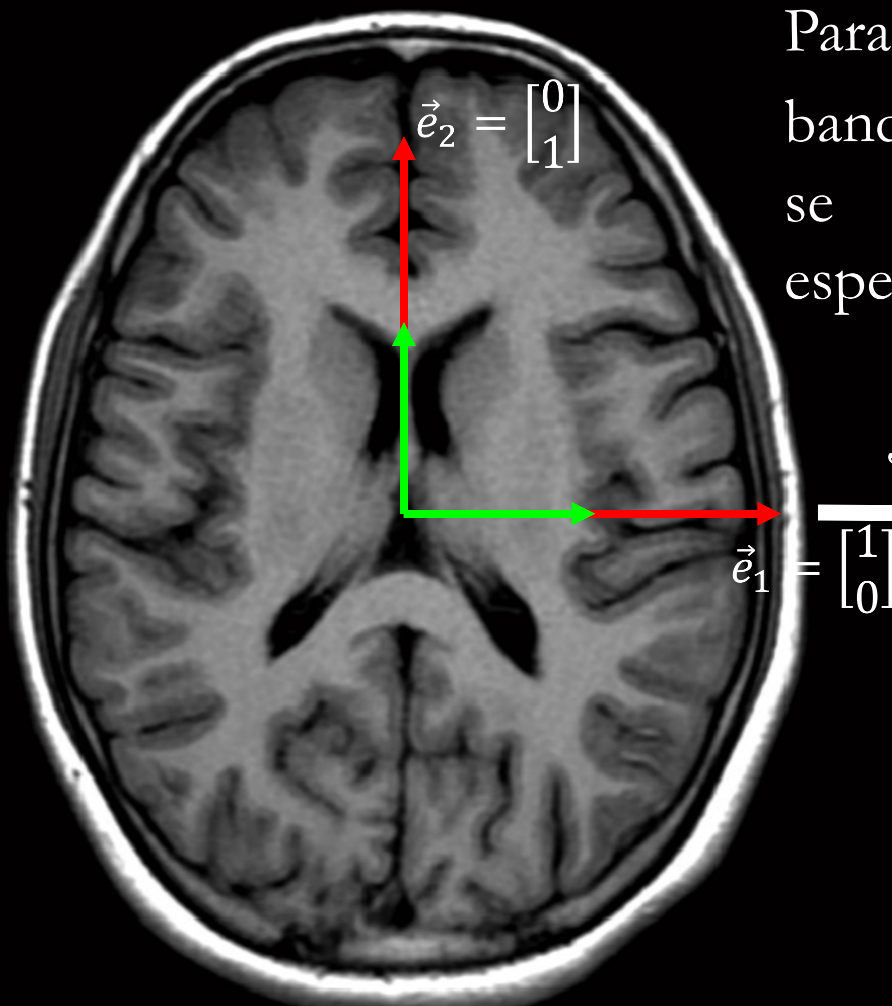
Modelo Matemático Básico del Muestreo

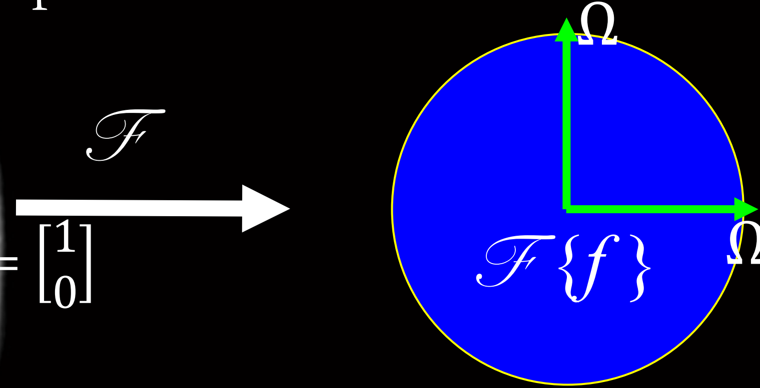
$$Ш_{G_\Delta} f = Ш_{G_\Delta} \times f = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{Ш_{G_\Delta}} * \hat{f}\right\}$$

$$\boxed{\mathscr{F}\left\{Ш_{G_\Delta} f\right\} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta}\right)^n Ш_{G_{\frac{2\pi}{\Delta}}} * \hat{f}}$$

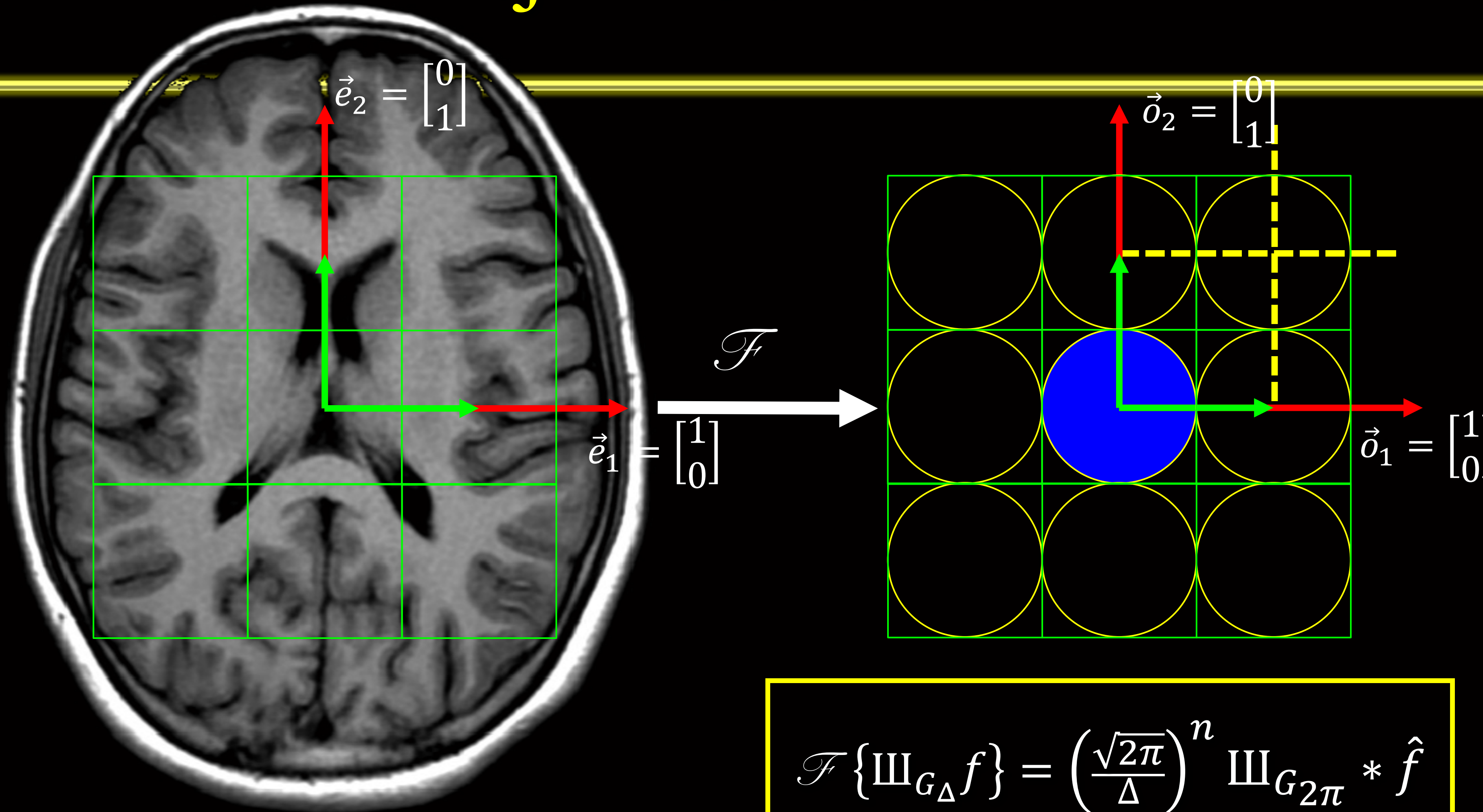
Rejilla Cuadrada

Para una función $f \in L_2$ con ancho de banda limitado ($\hat{f}(\bar{\xi}) = 0$ si $\|\bar{\xi}\| > \Omega$), se puede considerar que tiene un espectro radialmente simétrico:





Rejilla Cuadrada



$$\mathscr{F}\{\text{Ш}_{G_\Delta} f\} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta}\right)^n \text{Ш}_{G_{\frac{2\pi}{\Delta}}} * \hat{f}$$