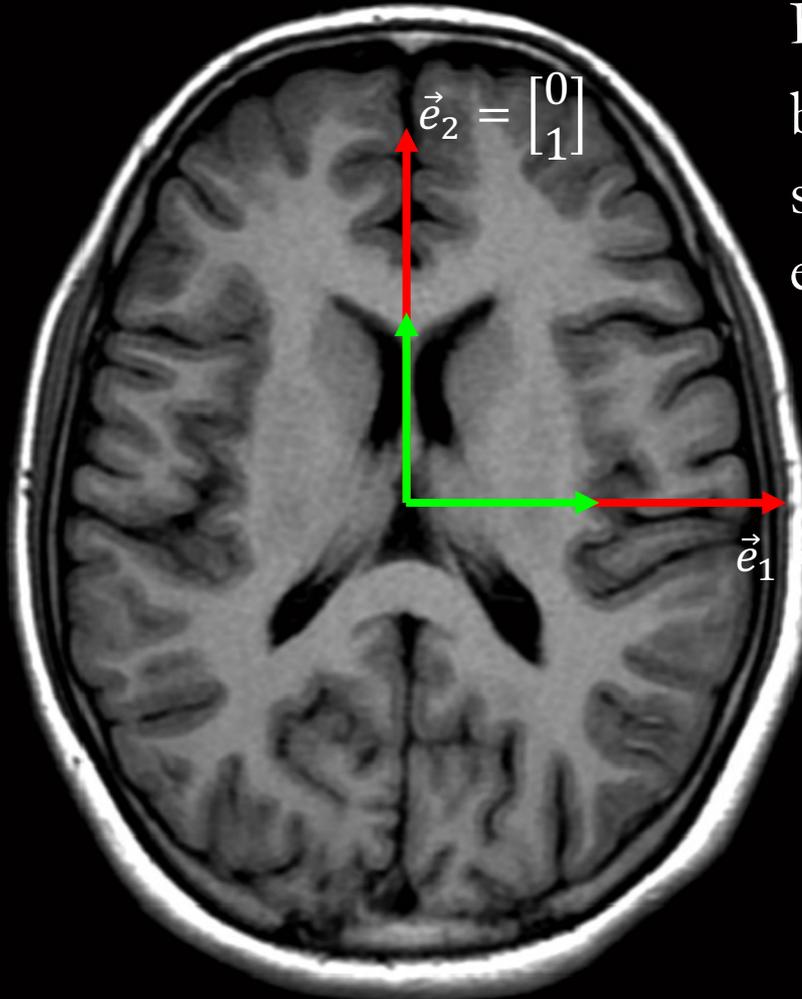
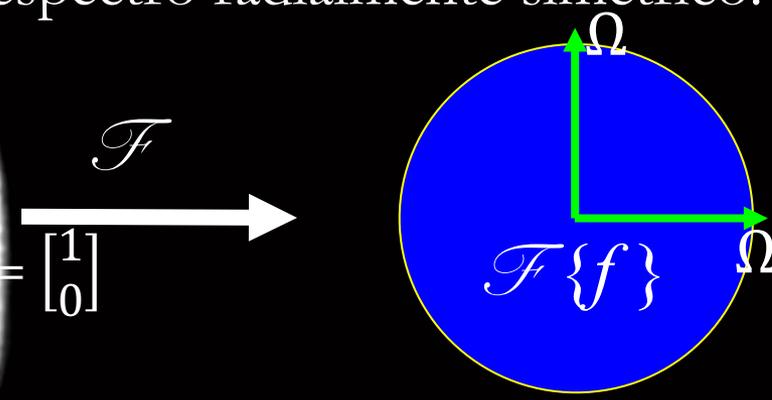


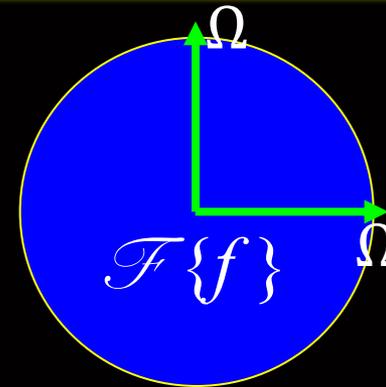
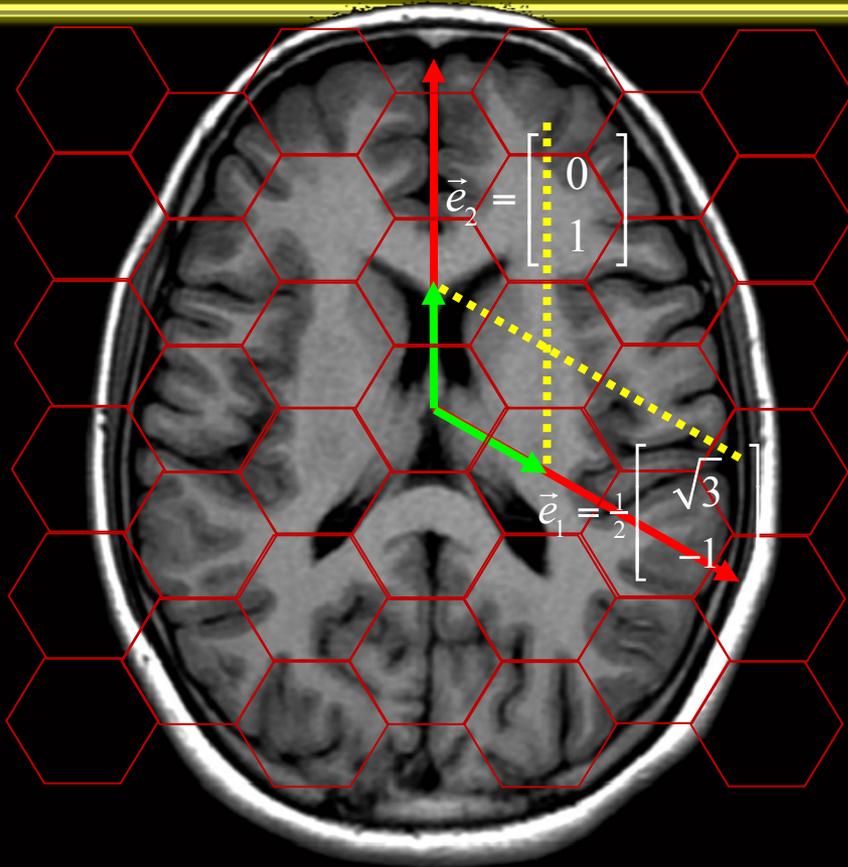
Rejilla Cuadrada



Para una función $f \in L_2$ con ancho de banda limitado ($\hat{f}(\bar{\xi}) = 0$ si $\|\bar{\xi}\| > \Omega$), se puede considerar que tiene un espectro radialmente simétrico:

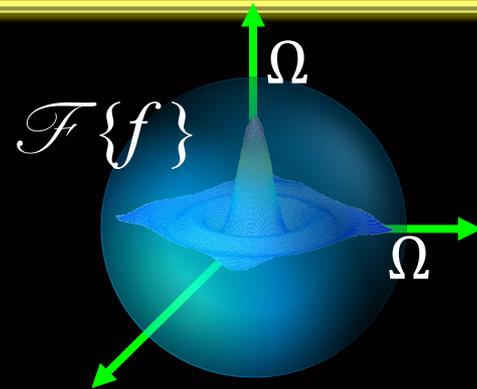
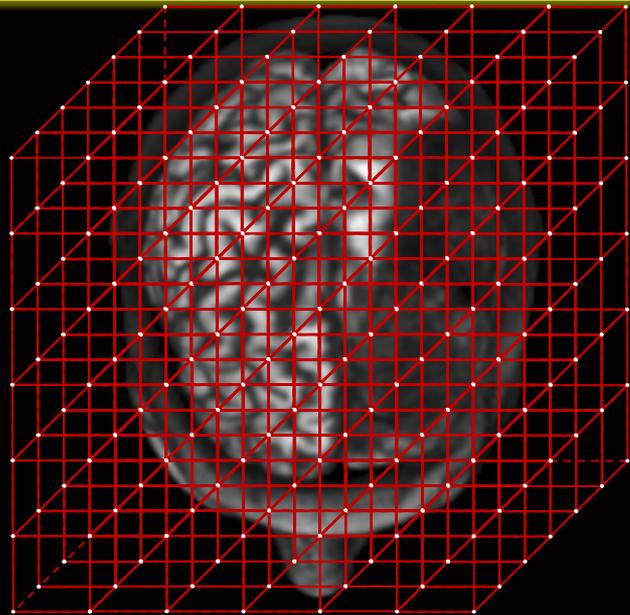


Rejilla Hexagonal

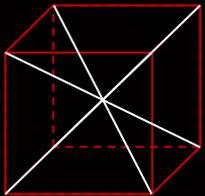


$$\mathcal{F}\{\mathbb{W}_{H_\Delta} f\} = \widehat{\mathbb{W}_{H_\Delta}} * \hat{f}$$

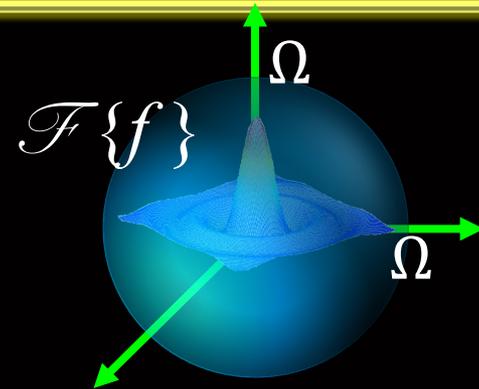
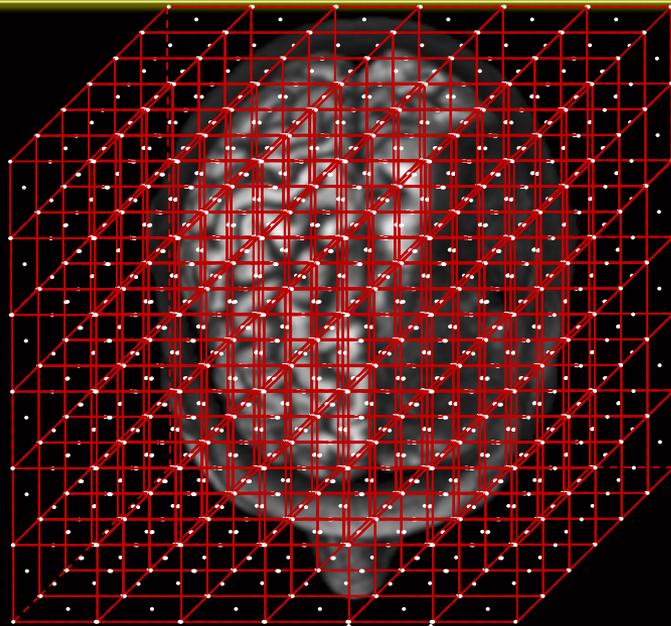
Otras Rejillas Cúbicas en 3D



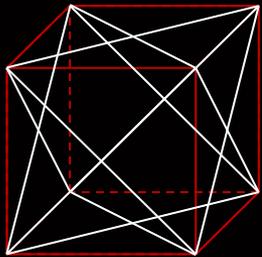
$$\mathcal{F}\{\mathbb{I}_{B_\Delta} f\} = \widehat{\mathbb{I}_{B_\Delta}} * \hat{f}$$



Otras Rejillas Cúbicas en 3D



$$\mathcal{F} \{ \mathbb{W}_{F_\Delta} f \} = \widehat{\mathbb{W}_{F_\Delta}} * \hat{f}$$



Tren de Impulsos *bcc* y *fcc*

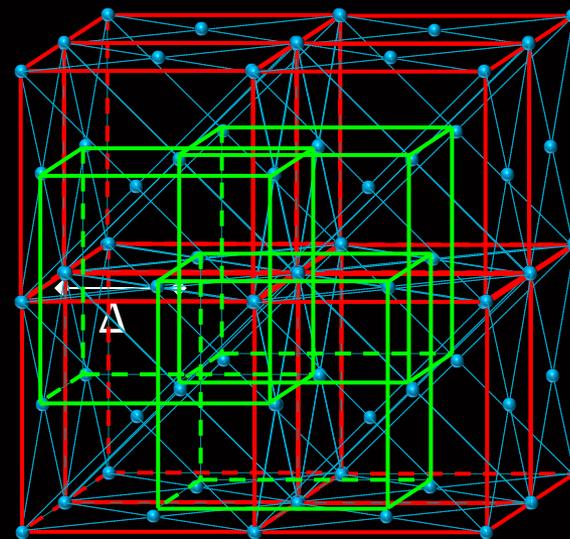
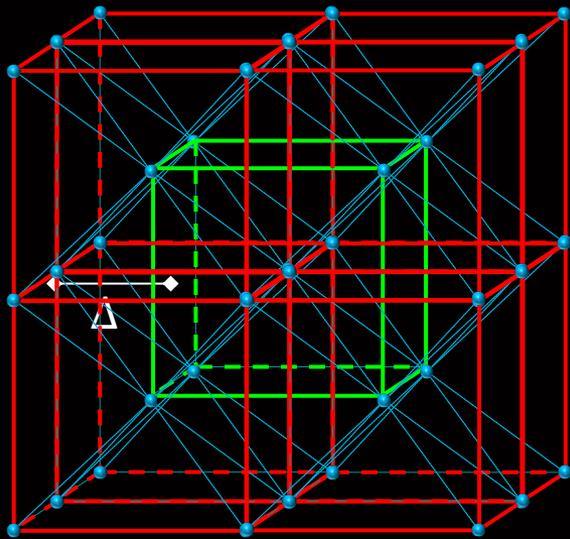
- El tren de impulsos que hemos visto está colocado sobre la rejilla G_Δ (cúbica simple). Claramente, podemos cambiar el arreglo de las posiciones de los impulsos, por ejemplo usando la rejilla B_Δ (*bcc*). Para analizar que ocurre con el tren de impulsos sobre la rejilla B_Δ introduciremos los vectores $\bar{b} = (\Delta, \Delta, \Delta)$, $\bar{d}_1 = (\Delta, \Delta, 0)$, $\bar{d}_2 = (0, \Delta, \Delta)$ y $\bar{d}_3 = (\Delta, 0, \Delta)$. Recordando que las definiciones de las rejillas cúbica simple, *bcc* y *fcc* son las siguientes $G_\Delta = \{\Delta\bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3\}$, $B_\Delta = \{\Delta\bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3 \text{ and } k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \pmod{2}\}$ y $F_\Delta = \{\Delta\bar{k} \mid \bar{k} \in \mathbb{Z}^3 \text{ and } k_1 + k_2 + k_3 \equiv 0 \pmod{2}\}$, respectivamente. Podemos ver que las rejillas *bcc* y *fcc* se pueden representar como

Tren de Impulsos *bcc* y *fcc*

$$\mathbb{I}_{G_\Delta} = \Delta \text{shah},$$

$$\mathbb{I}_{B_\Delta} = 2\Delta \text{shah} + 2\Delta \text{shah}_{\bar{b}} \text{ y}$$

$$\mathbb{I}_{F_\Delta} = 2\Delta \text{shah} + 2\Delta \text{shah}_{\bar{d}_1} + 2\Delta \text{shah}_{\bar{d}_2} + 2\Delta \text{shah}_{\bar{d}_3}.$$



Tren de Impulsos *bcc* y *fcc*

- Como ya vimos, para $n = 3$ se tiene que

$$\widehat{\Delta \text{shah}} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta}\right)^3 \text{shah} \Leftrightarrow \widehat{\text{III}}_{G_\Delta} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta}\right)^n \text{III}_{G_{\frac{2\pi}{\Delta}}}.$$

- Entonces, a partir de la notación para traslado tenemos que

$$\Delta \text{shah} = S_{\bar{y}} \times \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta}\right)^3 \text{shah}.$$

- Por lo que la transformada de Fourier de un tren de impulsos sobre la rejilla *bcc* se puede obtener como

$$\widehat{\text{III}}_{B_\Delta} = 2\Delta \widehat{\text{shah}} + 2\Delta \widehat{\text{shah}}_{\bar{b}}.$$

Tren de Impulsos *bcc* y *fcc*

$$\begin{aligned}
 \widehat{\text{III}}_{B_\Delta} &= {}^{2\Delta}\widehat{\text{shah}} + {}^{2\Delta}\widehat{\text{shah}}_{\bar{b}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Delta}}\right)^3 \frac{\pi}{\Delta} \text{shah} + S^{\bar{y}} \times \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Delta}}\right)^3 \frac{\pi}{\Delta} \text{shah} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Delta}}\right)^3 \sum_{\bar{y} \in G_{\frac{\pi}{\Delta}}} \delta_{\bar{y}} + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Delta}}\right)^3 \sum_{\bar{y} \in G_{\frac{\pi}{\Delta}}} \delta_{\bar{y}} S^{\bar{b}}(\bar{y}) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Delta}}\right)^3 \sum_{\bar{y} \in G_{\frac{\pi}{\Delta}}} \delta_{\bar{y}} \left(1 + S^{\bar{b}}(\bar{y})\right) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Delta}}\right)^3 \sum_{\bar{y} \in G_{\frac{\pi}{\Delta}}} \delta_{\bar{y}} \left(1 + e^{-i\langle \bar{b}, \bar{y} \rangle}\right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Delta}}\right)^3 \sum_{\bar{y} \in G_{\frac{\pi}{\Delta}}} \delta_{\bar{y}} \left(1 + \cos(\Delta(y_1 + y_2 + y_3))\right. \\
 &\quad \left. - i \sin(\Delta(y_1 + y_2 + y_3))\right)
 \end{aligned}$$

Tren de Impulsos *bcc* y *fcc*

donde y_i es de la forma $k_i \frac{\pi}{\Delta}$, lo que resulta en $\Delta(y_1 + y_2 + y_3) = \pi(y_1 + y_2 + y_3)$ y $\sin(y_1 + y_2 + y_3) = 0$. De manera similar,

$$1 + \cos(\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3) = \begin{cases} 0, & k_1 + k_2 + k_3 \text{ es impar} \\ 2, & k_1 + k_2 + k_3 \text{ es par} \end{cases}$$

lo cual es la definición de la rejilla *fcc*, por lo que

$$\widehat{\text{III}}_{B_\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Delta} \right)^3 \text{III}_{F \frac{\pi}{\Delta}}$$

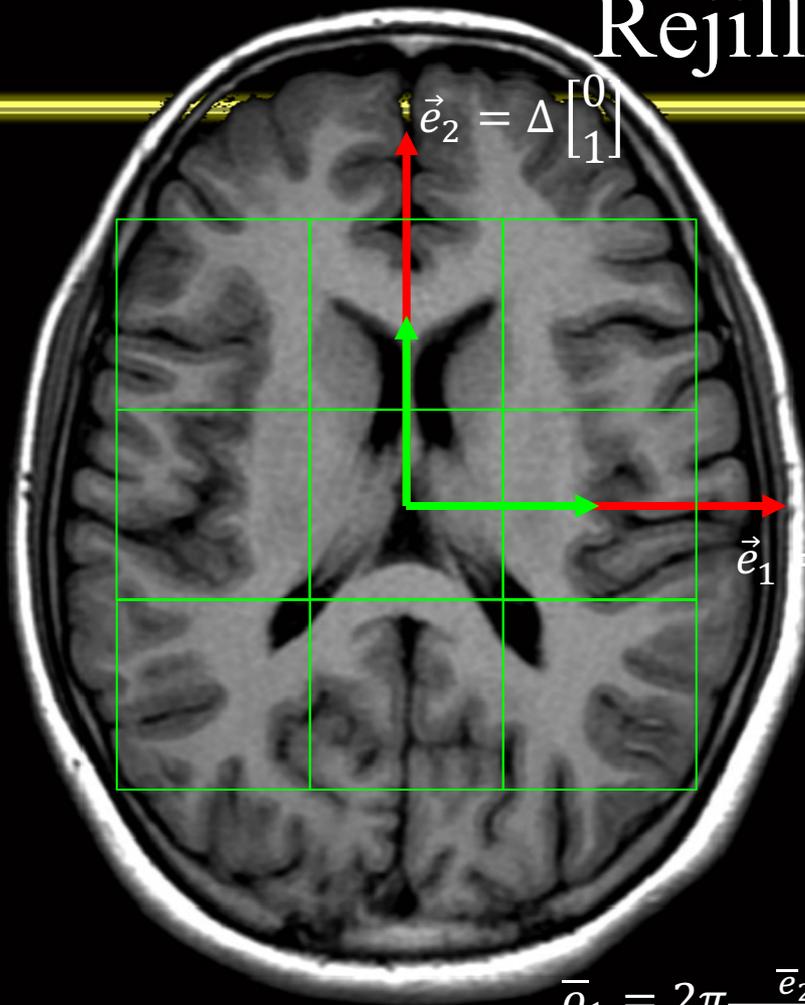
Tren de Impulsos *bcc* y *fcc*

De manera similar, la Transformada de Fourier de un tren de impulsos sobre una rejilla *fcc* es

$$\widehat{\text{III}}_{F_{\Delta}} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Delta} \right)^3 \text{III}_{B_{\frac{\pi}{\Delta}}}$$

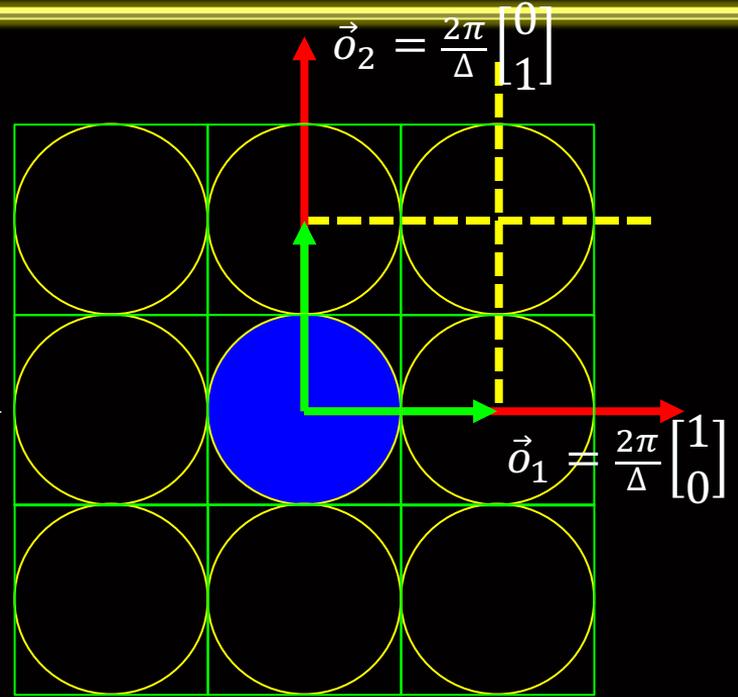
Vectores de Entramado (*lattice*)

Rejilla Cuadrada



$$\vec{e}_2 = \Delta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \Delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\vec{o}_2 = \frac{2\pi}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{o}_1 = \frac{2\pi}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{o}_1 = 2\pi \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\langle \vec{e}_1, (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \rangle}$$

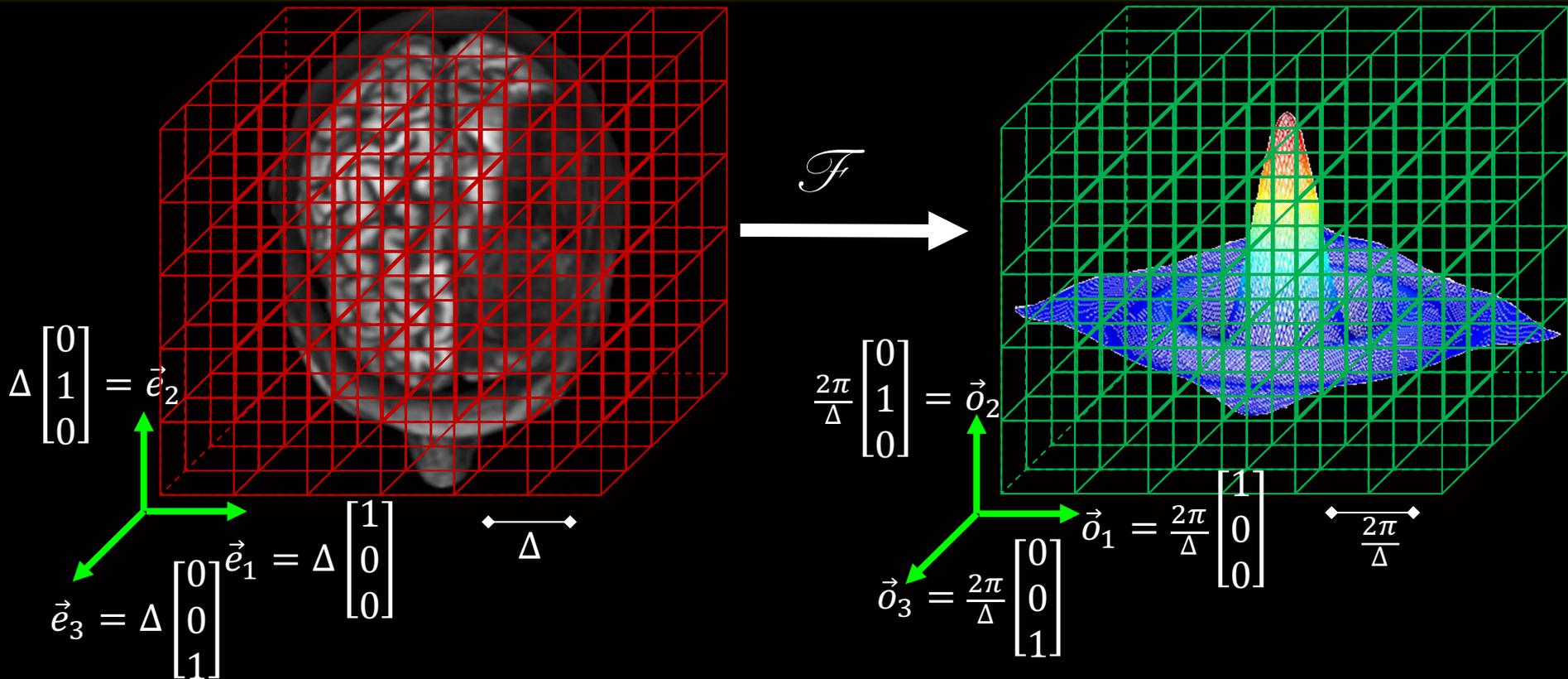
$$\vec{o}_2 = 2\pi \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\langle \vec{e}_1, (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \rangle}$$

$$\vec{o}_3 = 2\pi \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\langle \vec{e}_1, (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \rangle}$$

$$\mathcal{F} \{ \text{III}_{G_\Delta} f \} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \right)^n \text{III}_{G_{\frac{2\pi}{\Delta}}} * \hat{f}$$

Vectores de Entramado (*lattice*)

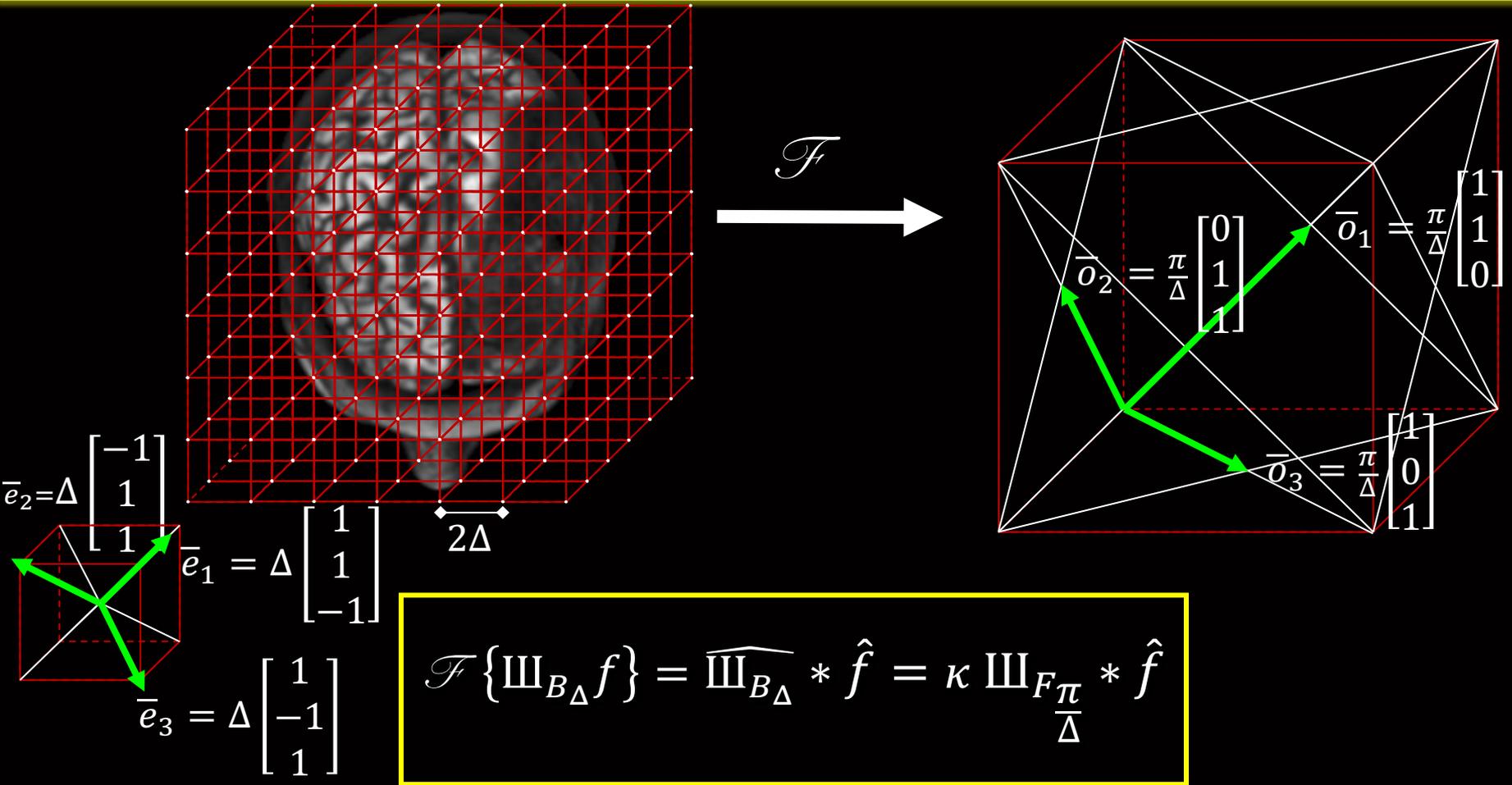
Rejilla Cúbica Simple



$$\mathcal{F} \left\{ \text{III}_{G_{\Delta}} f \right\} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \right)^n \text{III}_{G_{\frac{2\pi}{\Delta}}} * \hat{f}$$

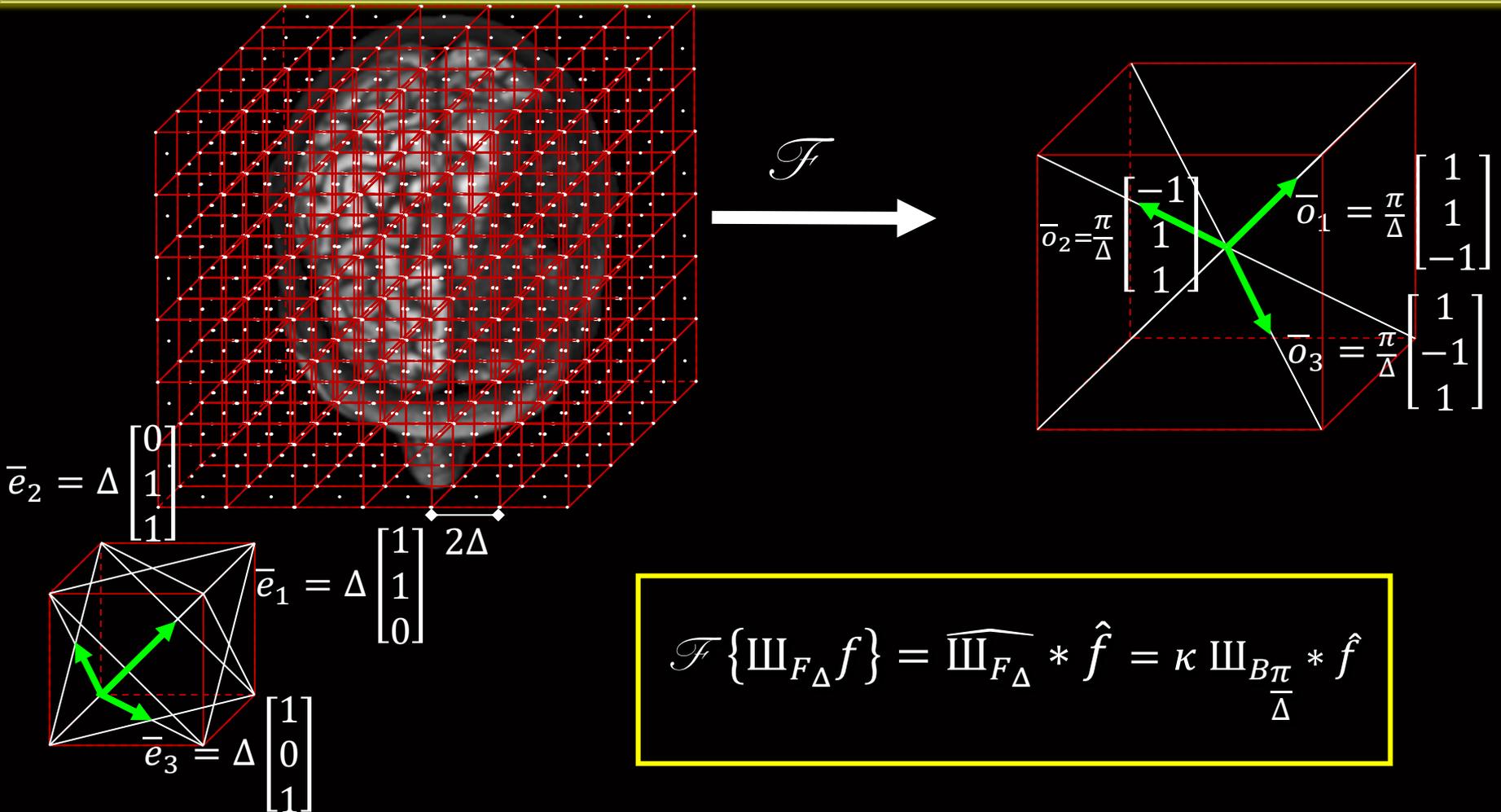
Vectores de Entramado (*lattice*)

Rejilla *bcc*

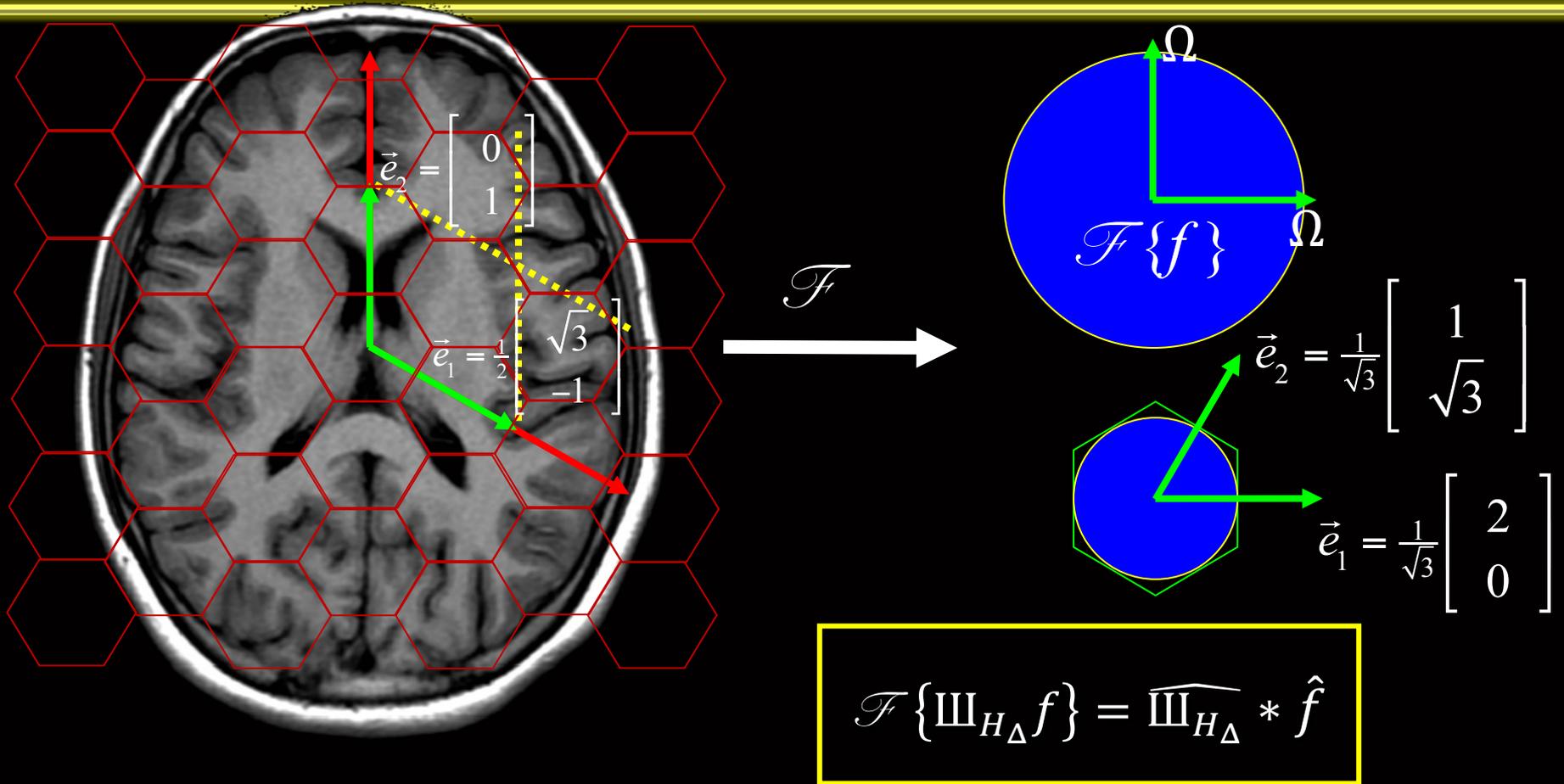


Vectores de Entramado (*lattice*)

Rejilla *fcc*



Rejilla Hexagonal

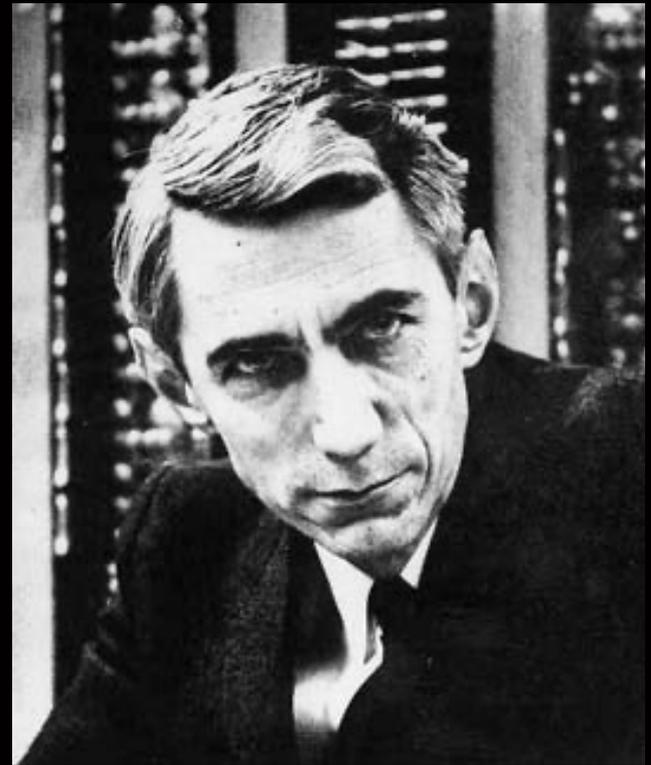


¿¿Que forma tiene?? \Leftrightarrow tarea

¿Cuántas Muestras son Necesarias? (¿Cuál es la distancia de muestreo?)



Harry Nyquist



Claude E. Shannon

Teoremas de Shannon y Nyquist

- Definición: Una función f cuya transformada de Fourier es cero para $|\bar{\xi}| > \Omega$ se llama de banda limitada por Ω .
- Teorema (Shannon): Si una función $f(x)$ no contiene frecuencias mayores a Ω , entonces f está determinada completamente al muestrear en puntos espaciados π/Ω .
- Teorema (Nyquist): Si f es una función que tiende a 0 lo suficientemente rápido al infinito y

$$\widehat{f}(\bar{\xi}) = 0 \text{ para } |\bar{\xi}| > \Omega$$

entonces f puede ser reconstruida a partir de las muestras

$$\left\{ f\left(\frac{\pi k}{\Omega}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- La condición de Nyquist implica que $\Delta \leq \frac{\pi}{\Omega}$ o la Tasa de Nyquist:
$$\Delta_{\xi} \geq \frac{\Omega}{\pi} .$$

La Formula Shannon-Whittaker

- La prueba del Teorema de Nyquist arroja la siguiente formula de interpolación:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \text{sinc}\left(\Omega(x - k\pi)\right)$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k) g(x - x_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k) S_k(x)$$

- S_k son funciones de expansión apropiadas (series de muestreo).

Ejemplo en 1D

- Si f es una función de banda limitada a $[-\Omega, \Omega]$, o en otras palabras

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

con $\widehat{f}(\xi) \in L^2(-\Omega, \Omega)$, entonces la función puede ser reconstruida a partir de sus muestras en los puntos

$x_k = \frac{k\pi}{\Omega}$, $|k| = 0, 1, 2, \dots$, por medio de la formula

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k) \frac{\sin(\Omega(x-x_k))}{\Omega(x-x_k)}$$

con la serie absolutamente y uniformemente convergente en conjuntos compactos.

Teorema de Muestreo en n Dimensiones

- Supongamos que tenemos una función f definida en el espacio n -dimensional cuya transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\bar{\xi}) = \mathcal{F}\{f(\bar{x})\} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{-i\langle \bar{x}, \bar{\xi} \rangle} d\bar{x}.$$

- Además, consideramos que $\hat{f}(\bar{\xi}) = 0$ para $\|\bar{\xi}\| > \Omega$ (con ancho de banda limitada), aunque el espectro puede ser asimétrico o desconectado.
- Deseamos expresar la función f por medio de una serie de muestreo determinada por puntos de muestreo periódicos.

Teorema de Muestreo en n Dimensiones

- Recordemos que los puntos en el espacio n -dimensional (\mathbb{Z}^n o \mathbb{R}^n) se pueden representar por medio de una combinación lineal de vectores base $\{\bar{e}_j\}$ que se pueden expresar como una matriz \mathbf{E} .
- Una función de reconstrucción $g(\bar{x})$ es tal que $f(\bar{x})$ se puede expresar por medio de

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^n} f(\Delta \mathbf{E} \bar{k}) g(\bar{x} - \Delta \mathbf{E} \bar{k}) \\ &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^n} \int_D f(\bar{y}) g(\bar{x} - \bar{y}) \delta(\bar{y} - \Delta \mathbf{E} \bar{k}) d\bar{y} \end{aligned}$$

Teorema de Muestreo en n Dimensiones

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^n} f(\Delta \mathbf{E} \bar{k}) g(\bar{x} - \Delta \mathbf{E} \bar{k}) \\ &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^n} \int_D f(\bar{y}) g(\bar{x} - \bar{y}) \delta(\bar{y} - \Delta \mathbf{E} \bar{k}) d\bar{y} \\ &= \int_D f(\bar{y}) g(\bar{x} - \bar{y}) \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^n} \delta(\bar{y} - \Delta \mathbf{E} \bar{k}) d\bar{y} \end{aligned}$$

- Obteniendo la Transformada de Fourier en ambos lados tenemos

$$\hat{f}(\bar{\xi}) = \frac{\hat{g}(\bar{\xi})}{|\det(\mathbf{E})|} \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\bar{\xi} - \Delta_{\xi} \mathbf{E} \bar{k}) \quad \leftarrow \text{Repetición del Espectro}$$