Problema 1.a

- Probar que $L = \{a^i b a^i : i \geq 17\}$ no es regular
- Asumir que L es regular:
  - $\exists\ m$ tal que el lema del bombeo se satisface
  - Sea $w = a^{m+17} b a^{m+17} \in L$
  - Por el lema del bombeo $\exists\ x, y, z$ donde $w = xyz$ &

    $i)\ xy^k z \in L, \forall\ k \geq 0 \quad ii)\ |y| \geq 1 \quad iii)\ |xy| \leq m$
  - Sea $x = a^i$, $y = a^j$ & $z = a^{m+17-i-j} b a^{m+17}$
  - Sea $k = 2$ entonces $xy^2 z = a^i a^j a^j a^{m+17-i-j} b a^{m+17}$

    $= a^{m+17+j} b a^{m+17} \notin L$ dado que $j \geq 1$
  - $\therefore L$ no es regular!

Problema 1.b

- Probar que $L = \{w \in \{a, b, c\}^* : n_a(w) > n_b(w) > n_c(w)\}$ no es regular
- Asumir que L es regular:
  - $\exists\ m$ tal que el lema del bombeo se satisface
  - Sea $w = a^{m+2} b^{m+1} c^{m-1} \in L$
  - Por el lema del bombeo $\exists\ x, y, z$ donde $w = xyz$ &

    $i)\ xy^k z \in L, \forall\ k \geq 0 \quad ii)\ |y| \geq 1 \quad iii)\ |xy| \leq m$
  - Sea $x = a^i$, $y = a^j$ and $z = a^{m+2-i-j} b^{m+1} c^{m-1}$
  - Sea $k = 0$ so $xz = a^i a^{m+2-i-j} b^{m+1} c^{m-1}$

    $= a^{m+2-j} b^{m+1} c^{m-1} \notin L$ dado que $j \geq 1$
  - $\therefore L$ no es regular!

Problema 1.c

- Probar que $L = \{a^i b^j c^k : k = i^j\ \&\ i, j, k \geq 1\}$ no es regular
- Asumir L es regular
  - $\exists\ m$ tal que el lema del bombeo se satisface
  - Sea $w = a^m b c^m \in L$ dado que $m^1 = m$
  - Por el lema del bombeo $\exists\ x, y, z$ donde $w = xyz$ &

    $i)\ xy^k z \in L, \forall\ k \geq 0 \quad ii)\ |y| \geq 1 \quad iii)\ |xy| \leq m$
  - Sea $x = a^i$, $y = a^j$ and $z = a^{m-i-j} b c^m$
  - Sea $k = 2$

    entonces $xy^2 z = a^i a^j a^j a^{m-i-j} b c^m$

    $= a^{m+j} b c^m \notin L$ dado que $(m + j)^1 \neq m$ donde $j \geq 1$
  - $\therefore L$ no es regular!

Problema 1.d

- Probar que $L = \{a^i b^j : i$ es un múltiplo de $j\ \&\ i, j \geq 2\}$ no es regular
- Asumir que L es regular:
  - $\exists\ m$ tal que el lema de bombeo se satisface
  - Sea $w = a^{2(m+1)} b^{m+1} \in L$ donde $2(m+1) = 2 \times (m+1)$
  - Por el lema del bombeo $\exists\ x, y, z$ donde $w = xyz$ &

    $i)\ xy^k z \in L, \forall\ k \geq 0 \quad ii)\ |y| \geq 1 \quad iii)\ |xy| \leq m$
  - Sea $x = a^i$, $y = a^j$ & $z = a^{2(m+1)-i-j} b^{m+1}$
  - Sea $k = 2$

    entonces $xy^2 z = a^i a^j a^j a^{2(m+1)-i-j} b^{m+1} = a^{2(m+1)+j} b^{m+1} \notin L$

    entonces $xy^2 z \in L$ solo si $2(m + 1) + j = k(m + 1)$

    entonces $xy^2 z \in L$ solo si $k = 2 + j/(m + 1)$

    pero dado que $1 \leq j \leq m$ se sigue que $j/(m + 1) < 1$
  - $\therefore 2(m + 1) + j$ no es múltiplo de $(m + 1)$
  - $\therefore a^{2(m+1)+j} b^{m+1} \notin L$ & L no es regular!

Problema 1.e

- Probar que $L = \{a^{n!} : n \geq 1\}$ no es regular
- Asumir que L es regular:
  - $\exists\ m$ tal que el lema de bombeo se satisface
  - Let $w = a^{m!}$
  - Por el lema del bombeo $\exists\ x, y, z$ donde $w = xyz$ &

    $i)\ xy^k z \in L, \forall\ k \geq 0 \quad ii)\ |y| \geq 1 \quad iii)\ |xy| \leq m$
  - Sea $k = 2$

    entonces $xy^2 z = a^i a^j a^j a^{m!-i-j} = a^{m!+j}$
  - $m! < m! + j \leq m! + m \leq (m + 1)!$ dado que $1 \leq j \leq m$
  - $\therefore a^{m!+j} \notin L$
  - $\therefore L$ no es regular!

Problema 2

- Probar que $L = \{a^i b^j : i + j$ is odd$\}$ es regular
- L es regular dado que se genera por la *ER*:
  - $(aa)^* a (bb)^* + (aa)^* b (bb)^*$

Problema 3.a

- Encontrar el autómata mínimo M_L para el FA M:

M

Q	a	b
→1	2	3
2	3	5
3	4	3
4	3	5
*5	2	5

S

5	1	1	1	1	0
4				0	1
3			0		1
2		0			1
1	0				1
Q	1	2	3	4	5

- S es la relación entre estados en diferentes particiones
- Encontrar los pares (r, s)

Problema 3.a … cont

- Encontrar los pares (r, s) tales que si $(p, q) \in S$ & $\delta(r, a) = p$ & $\delta(s, a) = q$ entonces $(r, s) \in S$

(r, s)	$\delta(r, a)$	$\delta(s, a)$	(p, q)	Pass
(3, 4)	4	3	(4, 3)	
(2, 4)	3	3	(3, 3)	
(2, 3)	3	4	(3, 4)	
(1, 4)	2	3	(2, 3)	
(1, 3)	2	4	(2, 4)	
(1, 2)	2	3	(2, 3)	

S

5	1	1	1	1	0
4				0	1
3			0		1
2		0			1
1	0				1
Q	1	2	3	4	5

- No hay pares de estados que se puedan incluir en S con transiciones con el símbolo a: no es una cadena diferenciante!

Problema 3.a … cont

- Encontrar los pares (r, s) tales que si $(p, q) \in S$ & $\delta(r, a) = p$ & $\delta(s, a) = q$ entonces $(r, s) \in S$

(r, s)	$\delta(r, b)$	$\delta(s, b)$	(p, q)	Paso
(3, 4)	3	5	(3, 5)	1
(2, 4)	5	5	(5, 5)	
(2, 3)	5	3	(5, 3)	1
(1, 4)	3	5	(3, 5)	1
(1, 3)	3	3	(3, 3)	
(1, 2)	3	5	(3, 5)	1

S

5	1	1	1	1	0
4	1		1	0	1
3		1	0		1
2	1	0			1
1	0				1
Q	1	2	3	4	5

- Primera pasada con b: Ni (1,3) ni (2,4) con a o b llegan a un 1!
- Las clases equivalentes: [1] = {1, 3}, [2] = {2, 4} & [5]

Problema 3.a… cont

- M_L = ({[13], [24], [5]}, {0, 1}, [13], {[5]}, δ) done δ es:
  - δ([13], a) = [24] & δ([13], b) = [3] = [13]
  - δ([24], a) = [3] = [13] & δ([24], b) = [5]
  - δ([5], a) = [2] = [24] & δ([5], b) = [5]

Q	a	b
→1	2	3
2	3	5
3	4	3
4	3	5
*5	2	5

Q	a	b
→[13]	[24]	[13]
[24]	[13]	[5]
*[5]	[24]	[5]

Renombrando los estados ⇨

Q	a	b
→q_0	q_1	q_0
q_1	q_0	q_2
*q_2	q_1	q_2

Problema 3.b

- Encontrar el autómata mínimo M_L para el FA M

M

Q	a	b
→1	2	1
*2	4	1
3	2	5
4	6	3
*5	4	5
6	5	2

6		1			1	0
5	1	1	1	1	0	1
4		1		0	1	
3		1	0		1	
2	1	0	1	1	1	1
1	0	1			1	
Q	1	2	3	4	5	6

- b es una cadena diferenciante, y los estados aceptores no están en la misma partición: el lenguaje del FA es la unión de dos lenguajes disjuntos!

Problema 3.b … cont

- b es una cadena diferenciante, y los estados aceptores no están en la misma partición: el lenguaje del FA es la unión de dos lenguajes disjuntos!

(r, s)	$\delta(r, b)$	$\delta(s, b)$	(p, q)	paso
(4, 6)	3	2	(3, 2)	1
(3, 6)	5	2	(5, 2)	1
(3, 4)	5	3	(5, 3)	1
(1, 6)	1	2	(1, 2)	1
(1, 4)	1	3	(1, 3)	2
(1, 3)	1	5	(1, 5)	1

S

6	1	1	1	1	1	0
5	1	1	1	1	0	1
4	1	1	1	0	1	
3	1	1	0		1	
2	1	0	1	1	1	1
1	0	1			1	
Q	1	2	3	4	5	6

- No hay estados equivalentes y el ya es FA el mínimo!