

Sesión 11

Teorema de Kleene

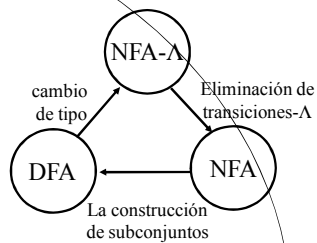
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Teorema de Kleene

- Un lenguaje L sobre el alfabeto Σ es regular (puede expresarse mediante expresiones regulares) si y sólo si existe un FA con alfabeto Σ que acepta L
 - Parte 1: Si hay una ER que denota L entonces hay un FA que acepta a L
 - Parte 2: Si hay un FA que acepta a L entonces existe una ER que denota a L

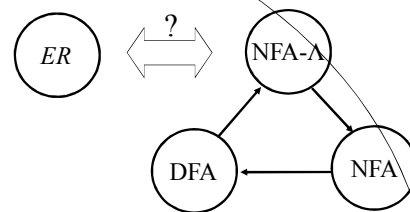
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La familia de los FAs



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

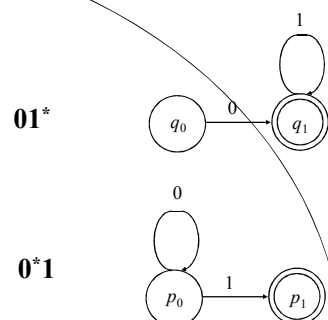
ER & FA



Podemos mostrar la equivalencia usando cualquiera de los tres tipos de FAs, pero una buena elección ayuda!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

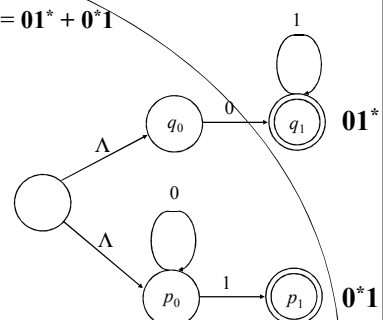
Semejanza entre ER & NFA-λ



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

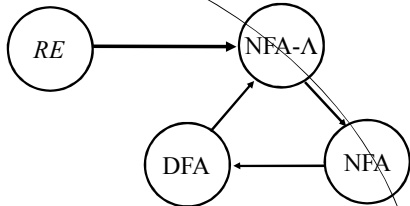
Semejanza entre ER & NFA-λ

- $L_1 \cup L_2 = 01^* + 0^*1$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

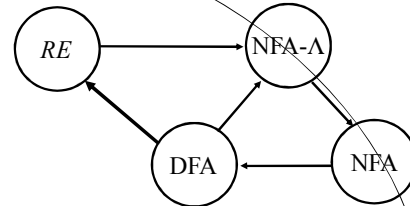
¡La estrategia más simple!



Si hay una FA para las partes de una RE , podemos componer un FA que corresponde a la ER a partir de FAs más simples (utilizando transiciones- Λ)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

¡La estrategia más simple!



En esta dirección necesitamos construir una ER que tome en cuenta todas las cadenas de cualquier longitud que el FA correspondiente acepta

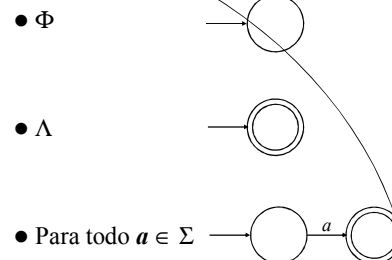
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba del teorema: Parte 1

- Todas las ER se construyen a partir de:
 - Φ , Λ & toda símbolo $a \in \Sigma$
- ...Y las operaciones de composición
 - $E+F$, EF and E^*
- Composición de automatas:
 - Definir un FA para las partes básicas
 - Definir la forma de un FA (esquemático) para cada uno de los operadores
 - Construir el FA en paralelo con la ER correspondiente

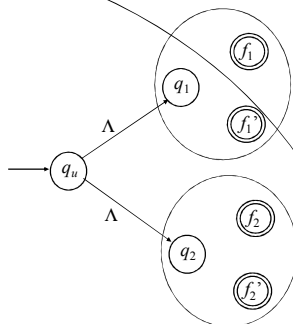
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba del teorema: Parte 1



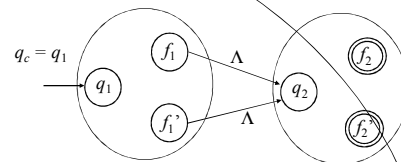
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El esquema de la unión: $E + F$



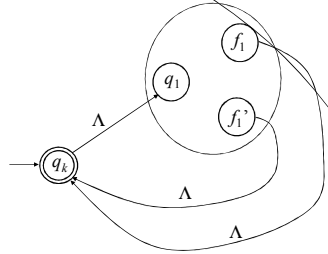
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El esquema de la concatenación: EF



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El esquema de la cerradura: E^*



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La construcción

- Con el FA para la ER básica
- Con los esquemas de FAs para las operaciones
- Construir un FA compuesto en paralelo con la estructura de la ER !
- Por ejemplo: Construir el FA que corresponde a la $ER (01)^* + (10)^*$

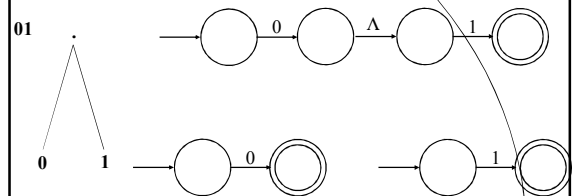
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El FA para $(01)^*$



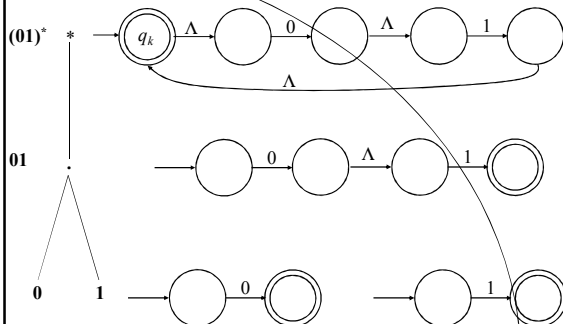
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El FA para $(01)^*$



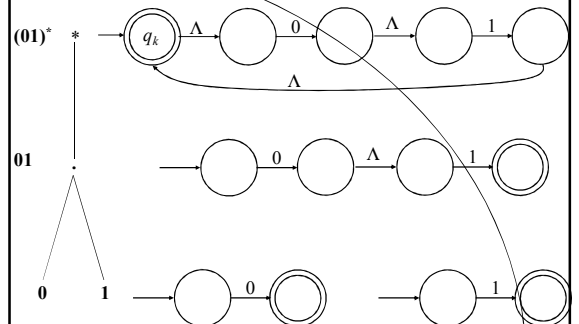
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo: El FA para $(01)^*$

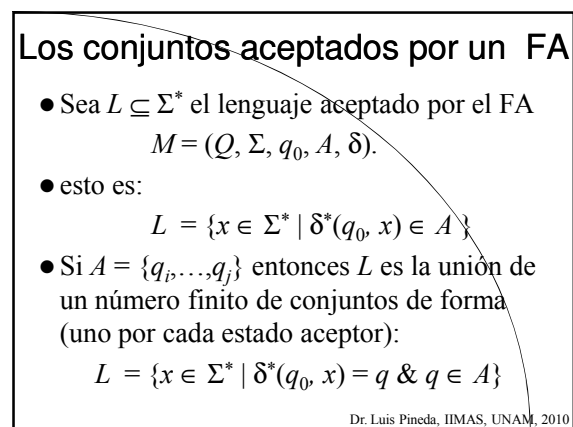
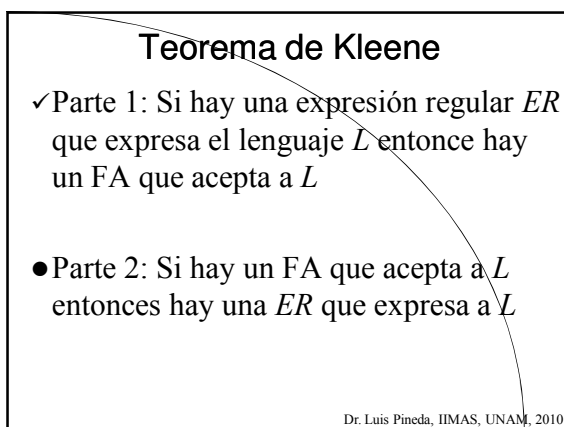
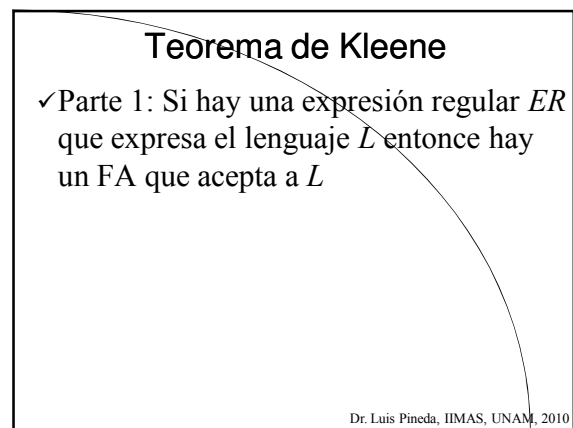
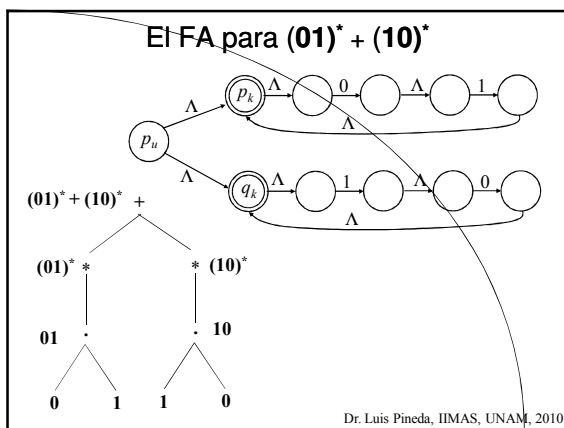
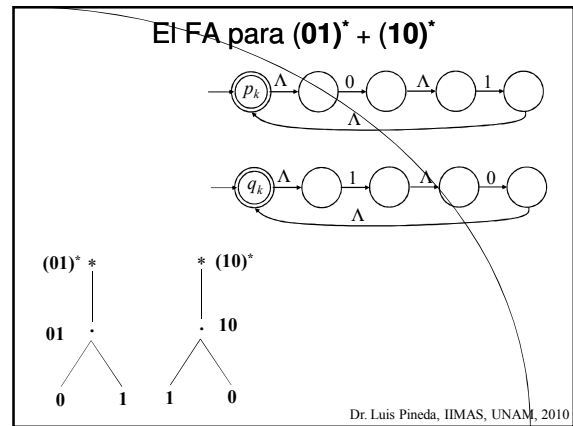
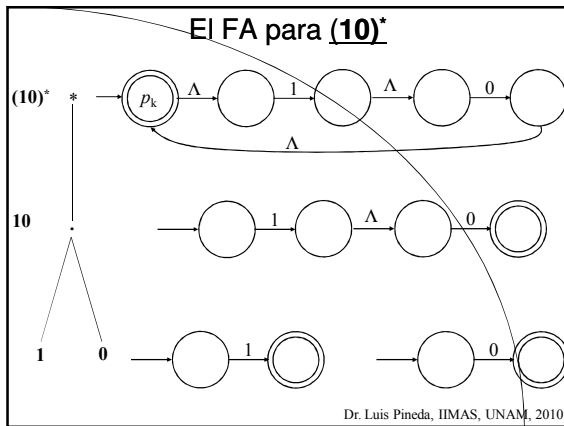


Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo: El FA para $(01)^*$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



Los conjuntos aceptados por un FA

- Consecuentemente, existe una *ER* que denota a cada uno de estos conjuntos!
- También, si p & q son estados de un FA, existe una *ER* para el conjunto:

$$L(p, q) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(p, x) = q\}$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Los conjuntos aceptados por un FA

- La *ER* que corresponde al FA es:
 - La unión de las *ER*

$$L(q_0, q) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) = q\}$$
para todo $q \in A = \{q_1, \dots, q_j\}$
- Para encontrar la *ER* que corresponde a este conjunto, construimos una *ER* para cada uno de los lenguajes reconocidos en todas las trayectorias de forma:

$$L(p, q) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(p, x) = q\}$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Trayectoria a través de un estado

- Asignamos un número natural n a cada estado del FA
- La cadena $x \in \Sigma^*$ representa una trayectoria del estado p al estado q a través del estado s si existen cadenas no-vacías y & z tales que:

$$-x = yz \quad \delta^*(p, y) = s \quad \delta^*(s, z) = q$$

$$p \xrightarrow{y} s \xrightarrow{z} q$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Trayectoria a través de un estado

- Una trayectoria puede ir desde o hasta un estado sin pasar a través de él:

$$p \xrightarrow{y} q$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Trayectoria a través de un estado

- Sea $L(p, q, j)$ donde $j \geq 0$ el lenguaje de todas las trayectorias que pasan a través de un estado cuyo número no es mayor que j
- Hay n estados, por lo tanto:

$$L(p, q, n) = L(p, q)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba de que $L(p, q)$ es regular

- La inducción:
 - El lenguaje $L(p, q, n)$ es regular si $L(p, q, j)$ es regular, para todo j tal que $0 \leq j \leq n$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba de que $L(p, q)$ es regular

- La base inductiva:
 - Para todo $p \& q$, $L(p, q, 0)$ es regular
 - Estos es, los lenguajes de todas las trayectoria que no pasan a través de ningún estado en el FA son regulares:

$$L(p, q, 0) \subseteq \Sigma \cup \{\Lambda\}$$
 - El número de estados es finito, por lo tanto, el lenguaje $L(p, q, 0)$, para todo $p \& q$, es regular: el número de trayectorias que no pasan a través de ningún estado es también finito!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba de que $L(p, q)$ es regular

- La hipótesis de inducción:
 - $0 \leq k$
 - Si para todo $p \& q$ tales que $1 \leq p \& q \leq n$ el lenguaje $L(p, q, k)$ es regular
 - queremos mostrar que $L(p, q, k+1)$ es regular

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba de que $L(p, q)$ es regular

- Una cadena x está en $L(p, q, k+1)$ si x representa la trayectoria de p a q que pasa a través de un estado no mayor que $k+1$
- Esto puede ocurrir de dos formas:
 - Caso 1: La cadena no pasa a través del estado $k+1$, por lo que no pasa por ningún estado mayor que k , entonces

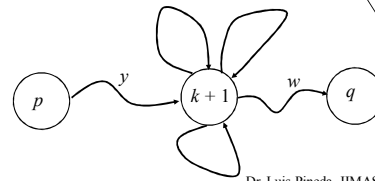
$$x \in L(p, q, k)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba de que $L(p, q)$ es regular

- Caso 2: La cadena pasa por el estado $k+1$, pero no por ningún estado cuyo número es mayor que $k+1$:

$$x = yzw$$

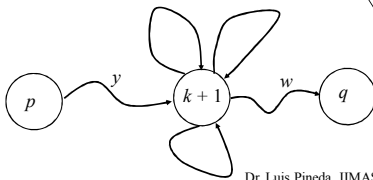


Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba de que $L(p, q)$ es regular

- $x = yzw$
 - $y \in L(p, k+1, k)$ Llega al estado $k+1$
 - $z \in L(k+1, k+1, k)^*$ pasa por $k+1$ una o más veces
 - $w \in L(k+1, q, k)$ va del estado $k+1$ al estado q
- x se construye con la concatenación y la cerradura:

$$x \in L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Los dos casos

- Caso 1:
 - $x \in L(p, q, k)$
- Caso 2:
 - $x \in L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$
- Entonces:

$$L(p, q, k+1) = L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Los dos casos

- $L(p, q, k+1)$ se construye con:
 - Unión
 - Concatenación
 - Cerradura
- Por lo tanto $L(p, q, k+1)$ es regular!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Y...?

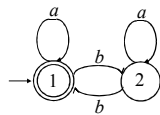
- La prueba es constructiva: nos da un algoritmo para encontrar la *ER* que corresponde a un FA:

- $L(p, q, 0) = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} & \text{si } p \neq q \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\Lambda\} & \text{si } p = q \end{cases}$
- $L(p, q, k+1) = L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

- $L(p, q, n) = L(p, q)$ & $L = \bigcup_{q \in A} L(q_0, q)$

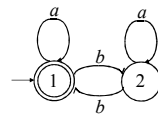
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La *ER* que corresponde a un FA



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La *ER* que corresponde a un FA

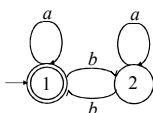


$$\begin{aligned} &(a^*ba^*ba^*)^*? \\ &a^* + (ba^*ba^*)^*? \\ &a^* + (a^*ba^*b)^*? \end{aligned}$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El caso base: $r(p, q, 0)$

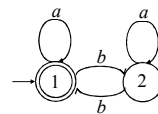
$$L(p, q, 0) = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} & \text{si } p \neq q \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\Lambda\} & \text{si } p = q \end{cases}$$



p	$r(p, 1, 0)$	$r(p, 2, 0)$
1	$a + \Lambda$	b
2	b	$a + \Lambda$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p, q, k+1)$

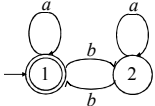


p	$r(p, 1, k+1)$	$r(p, 2, k+1)$
1		
2		

$$L(p, q, k+1) = L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,1)$



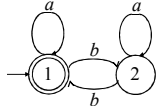
p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	
2		

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 0, k+1 = 1$
 $L(1, 1, 1) = L(1, 1, 0) \cup L(1, 1, 0)L(1, 1, 0)^*L(1, 1, 0)$
 $= (a + \Lambda) + (a + \Lambda)(a + \Lambda)^*(a + \Lambda)$
 $= a^*$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,1)$



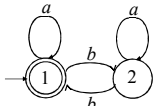
p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	$b + a^*b$
2		

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 0, k+1 = 1$
 $L(1, 2, 1) = L(1, 2, 0) \cup L(1, 1, 0)L(1, 1, 0)^*L(1, 2, 0)$
 $= b + (a + \Lambda)(a + \Lambda)^*b$
 $= b + a^*b$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,1)$



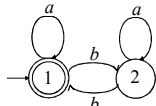
p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	$b + a^*b$
2		

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 0, k+1 = 1$
 $L(1, 2, 1) = L(1, 2, 0) \cup L(1, 1, 0)L(1, 1, 0)^*L(1, 2, 0)$
 $= b + (a + \Lambda)(a + \Lambda)^*b$
 $= b + a^*b$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Simplificando...



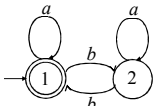
p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	a^*b
2		

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 0, k+1 = 1$
 $L(1, 2, 1) = L(1, 2, 0) \cup L(1, 1, 0)L(1, 1, 0)^*L(1, 2, 0)$
 $= b + (a + \Lambda)(a + \Lambda)^*b$
 $= b + a^*b = a^*b$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,1)$



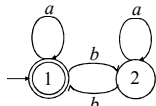
p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	a^*b
2	ba^*	

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 0, k+1 = 1$
 $L(2, 1, 1) = L(2, 1, 0) \cup L(2, 1, 0)L(1, 1, 0)^*L(1, 1, 0)$
 $= b + b(a + \Lambda)^*(a + \Lambda)$
 $= b + ba^* = ba^*$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,1)$



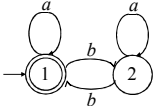
p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	a^*b
2	ba^*	$\Lambda + a + ba^*b$

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 0, k+1 = 1$
 $L(2, 2, 1) = L(2, 2, 0) \cup L(2, 1, 0)L(1, 1, 0)^*L(1, 2, 0)$
 $= (a + \Lambda) + b(a + \Lambda)^*b$
 $= a + \Lambda + ba^*b$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,1)$



p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	a^*b
2	ba^*	$\Lambda + a + ba^*b$

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 0, k+1 = 1$
 $L(2, 2, 1) = L(2, 2, 0) \cup L(2, 1, 0)L(1, 1, 0)^*L(1, 2, 0)$
 $= (a + \Lambda) + b(a + \Lambda)^*b$
 $= a + \Lambda + ba^*b$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,2)$

p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	a^*b
2	ba^*	$\Lambda + a + ba^*b$

p	$r(p,1,2)$	$r(p,2,2)$
1	RE_{11-2}	
2		

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 1, k+1 = 2$
 $L(1, 1, 2) = L(1, 1, 1) \cup L(1, 2, 1)L(2, 2, 1)^*L(2, 1, 1)$
 $= a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$
 $= RE_{11-2}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,2)$

p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	a^*b
2	ba^*	$\Lambda + a + ba^*b$

p	$r(p,1,2)$	$r(p,2,2)$
1	RE_{11-2}	RE_{12-2}
2		

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 1, k+1 = 2$
 $L(1, 2, 2) = L(1, 2, 1) \cup L(1, 2, 1)L(2, 2, 1)^*L(2, 2, 1)$
 $= a^*b + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(\Lambda + a + ba^*b)$
 $= RE_{12-2}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,2)$

p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	a^*b
2	ba^*	$\Lambda + a + ba^*b$

p	$r(p,1,2)$	$r(p,2,2)$
1	RE_{11-2}	RE_{12-2}
2	RE_{21-2}	

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 1, k+1 = 2$
 $L(2, 1, 2) = L(2, 1, 1) \cup L(2, 2, 1)L(2, 2, 1)^*L(2, 1, 1)$
 $= ba^* + (\Lambda + a + ba^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$
 $= RE_{21-2}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q,2)$

p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$
1	a^*	a^*b
2	ba^*	$\Lambda + a + ba^*b$

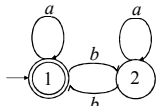
p	$r(p,1,2)$	$r(p,2,2)$
1	RE_{11-2}	RE_{12-2}
2	RE_{21-2}	RE_{22-2}

$L(p, q, k+1) =$
 $L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k)L(k+1, k+1, k)^*L(k+1, q, k)$

$k = 1, k+1 = 2$
 $L(2, 2, 2) = L(2, 2, 1) \cup L(2, 2, 1)L(2, 2, 1)^*L(2, 2, 1)$
 $= (\Lambda + a + ba^*b) +$
 $(\Lambda + a + ba^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(\Lambda + a + ba^*b)$
 $= RE_{22-2}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$



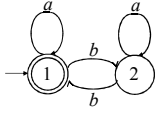
p	$r(p,1,2)$	$r(p,2,2)$
1	RE_{11-2}	RE_{12-2}
2	RE_{21-2}	RE_{22-2}

Condición final de la inducción: $L(p, q, n) = L(p, q)$ &

$$L = \bigcup_{q \in A} L(q_0, q)$$

$L(1, 1, 2) = L(1, 1, 1) \cup L(1, 2, 1)L(2, 2, 1)^*L(2, 1, 1)$
 $= a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

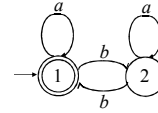
$$(a^*ba^*ba^*)^* ?$$

$$(a^* + ba^*ba^*)^* !$$

$$(a^* + a^*ba^*b)^* !$$

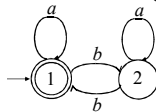
$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

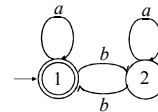
$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

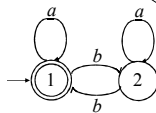
$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

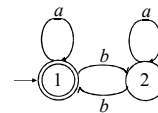
$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

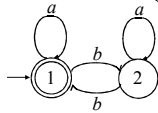
$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

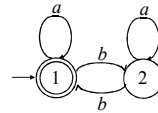
$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

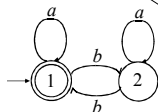
$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La inducción: $r(p,q)$ 

$$L(1, 1, 2) = a^* + (a^*b)(\Lambda + a + ba^*b)^*(ba^*)$$

La expresión que mejor refleja la estructura interna del FA

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Teorema de Kleene

- ✓Parte 1: Si hay una expresión regular ER que expresa el lenguaje L entonces hay un FA que acepta a L
- ✓Parte 2: Si hay un FA que acepta a L entonces existe una ER que denota a L

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Teorema de Kleene

$ER = FA = NFA = NFA-\Lambda$

LR

LLC

LSC & lenguajes sin restricciones

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010