

Sesión 14

Gramáticas libres del contexto (GLC o CFG)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Hay lenguajes que no son regulares

- $Pal = \{w \mid w = w^R\} \subseteq \{0, 1\}^*$
- Pal no es regular:
 - El lema del bombeo:
 - Sea n la constante asociada
 - Sea $w = 0^n 10^n$: $|w| = 2n + 1 > n$
 - Si Pal es regular $w = xyz$, tal que $|xy| \leq n$ & $|y| > 0$; y es una secuencia al final del primer grupo de 0's: $x = 0^i$ & $y = 0^j$, tal que $i \geq 0$, $j > 0$, $i + j \leq n$ entonces $|xy| = |0^i 0^j| \leq n$ & $|y| = j > 0$.
 - Sea $m = 0$:
 - $xy^m z = xz = 0^i 10^n \notin Pal$ as $i < n$
- Pal no se puede expresar con una ER o un FA

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición recursiva de lenguajes

- Definición recursiva de un lenguaje:
 - Definir cadenas compuestas de un lenguaje como función de cadenas más simples (en el lenguaje)
- Definición recursiva de Pal :
 - Base: $\Lambda, 0$ & $1 \in Pal$
 - Inducción: Si $w \in Pal$ entonces $1w1$ & $0w0$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición recursiva de lenguajes

- Una GLC (CFG) es una notación para expresar este tipo de definiciones recursivas
 - Las variables representan clases de cadenas (i.e. categorías gramaticales y lenguajes)
 - Las constantes representan los símbolos léxicos en Σ
 - Las reglas de producción tiene la forma:

$$\alpha \rightarrow \beta$$
 α puede reescribirse como β en cualquier contexto

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición recursiva de lenguajes

- Definición recursiva de Pal
 - Base: $\Lambda, 0$ and $1 \in Pal$
 - Inducción: Si $w \in Pal$ entonces $1w1$ & $0w0$
- La gramática de Pal : $0110 \in Pal$

1. $P \rightarrow \Lambda$	1. $P \Rightarrow 0P0$	por 4
2. $P \rightarrow 0$	2. $\Rightarrow 01P10$	por 5
3. $P \rightarrow 1$	3. $\Rightarrow 01\Lambda 10$	por 1
4. $P \rightarrow 0P0$	= 0110	
5. $P \rightarrow 1P1$		

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición recursiva de lenguajes : Ejemplo 2

- Definición recursiva de L_{exp} (no-regular)
 - Base: a
 - Inducción: Si $w \in L$ entonces $w + w \mid w * w \mid (w)$
- La GLC: $a + (a * a) \in L$:

1. $E \rightarrow a$	1. $E \Rightarrow E + E$	por 2
2. $E \rightarrow E + E$	2. $\Rightarrow a + E$	por 1
3. $E \rightarrow E * E$	3. $\Rightarrow a + (E)$	por 4
4. $E \rightarrow (E)$	4. $\Rightarrow a + (E * E)$	por 3
5. $\Rightarrow a + (a * E)$	5. $\Rightarrow a + (a * E)$	por 1
6. $\Rightarrow a + (a * a)$	6. $\Rightarrow a + (a * a)$	por 1

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición formal de las GLC

- Una gramática libre de contexto (GLC) es un cuarteto

$$G = (V, \Sigma, S, P),$$

donde:

- V es un conjunto de variables (símbolos no terminales, categorías sintácticas, tipos de cadenas)
- Σ es el alfabeto (símbolos léxicos o terminales)
- $S \in V$ el símbolo inicial (oración, programa)
- P es el conjunto de reglas gramáticas o reglas de producción

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición formal de las GLC

- Reglas gramáticas o de producción:

$$A \rightarrow \gamma \quad (\text{Las producciones de } A)$$

donde:

- $A \in V$ es la cabeza (*head*) de la regla
- " \rightarrow " es el símbolo de *producción*
- $\gamma \in \{V \cup \Sigma\}^*$ es el cuerpo de la prod.

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición formal: ejemplos

- GLC para Pal

- $G_{pal} = (\{P\}, \{0, 1\}, P, Q)$
- $Q = \{P \rightarrow \Lambda, P \rightarrow 0, P \rightarrow 1, P \rightarrow 0P0, P \rightarrow 1P1\}$

- Notación compacta para Q :

$$P \rightarrow \Lambda \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición formal: ejemplos

- GLC para $0^n 1^n$

- $G_{pal01} = (\{P\}, \{0, 1\}, P, \{P \rightarrow \Lambda, P \rightarrow 0P1\})$

- Genera 000111:

0P1

00P11

000P111

000111

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Definición formal: ejemplos

- GLC para L_{exp}

- $G_{exp} = (\{E\}, \{+, *, (,), a\}, E, P)$
- $P = \{E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid a\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Producciones

- Si α es una cadena de forma

$$\alpha_1 A \alpha_2$$

y hay una producción de forma

$$A \rightarrow \gamma$$

entonces α puede reescribirse como una β de forma:

$$\alpha_1 \gamma \alpha_2$$

- ¿Por qué libre de contexto?

- La substitución se no depende de la forma de α_1 & α_2

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivaciones

- Se dice que α genera o deriva a β o que β es generada o derivada a partir de α en un paso en G :

$$\alpha \Rightarrow_G \beta$$

- Derivación en *Pal*:

$$P \Rightarrow_G 0P0 \Rightarrow_G 01P10 \Rightarrow_G 01\Lambda 10 = 0110$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivaciones en *GLC*

- Derivación en $L = 0^n 1^n$
 $P \Rightarrow 0P1 \Rightarrow 00P11 \Rightarrow 00\Lambda 11 = 0011$
- Si es claro cuál es G , escribimos simplemente " \Rightarrow "

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivaciones-*

- Derivaciones-*: derivaciones en cero o más pasos en una gramática G :

$$\alpha \Rightarrow_G^* \beta$$

- ya sea que $\alpha = \beta$
- o existe una $k \geq 1$ y cadenas $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$, con $\alpha_0 = \alpha$ & $\alpha_k = \beta$ tales que $\alpha_i \Rightarrow_G \alpha_{i+1}$ para toda i tal que $0 \leq i \leq k-1$

- Ejemplos:

- $P \Rightarrow_{Pal}^* 0110$
- $P \Rightarrow_{Pal01}^* 0011$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Estructura sintáctica

- Derivación en *Pal*:

- P



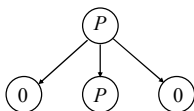
Producciones: $P \rightarrow \Lambda \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Estructura sintáctica

- Derivación en *Pal*:

- $P \Rightarrow_G 0P0$



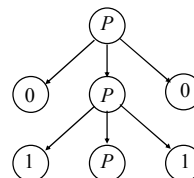
Producciones: $P \rightarrow \Lambda \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Estructura sintáctica

- Derivación en *Pal*:

- $P \Rightarrow_G 0P0 \Rightarrow_G 01P10$



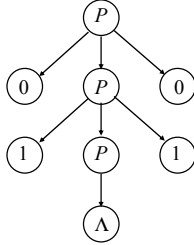
Producciones: $P \rightarrow \Lambda \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Estructura sintáctica

- Derivación en *Pal*:

$$- P \Rightarrow_G 0P0 \Rightarrow_G 01P10 \Rightarrow_G 01\Lambda 10$$



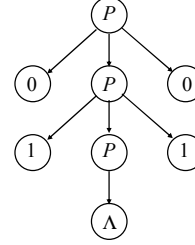
Producciones: $P \rightarrow \Lambda \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Estructura sintáctica

- Derivación en *Pal*:

$$- P \Rightarrow_G 0P0 \Rightarrow_G 01P10 \Rightarrow_G 01\Lambda 10 = 0110$$



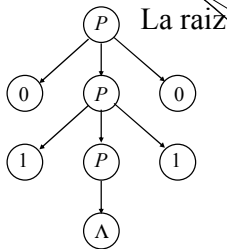
Producciones: $P \rightarrow \Lambda \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Estructura sintáctica

- Derivación en *Pal*:

$$- P \Rightarrow_G 0P0 \Rightarrow_G 01P10 \Rightarrow_G 01\Lambda 10 = 0110$$

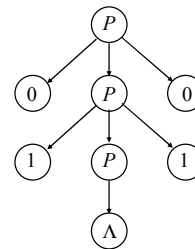


Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Estructura sintáctica

- Derivación en *Pal*:

$$- P \Rightarrow_G 0P0 \Rightarrow_G 01P10 \Rightarrow_G 01\Lambda 10 = 0110$$



La cosecha (The yield)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivaciones izquierdas (leftmost)

- Derivación más izquierda: \Rightarrow_{lm}

$$- E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + (E) \Rightarrow a + (E * E)$$

$$\Rightarrow a + (a * E) \Rightarrow a + (a * a)$$

$$- E \Rightarrow_{lm}^* a + (a * a)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más izquierda

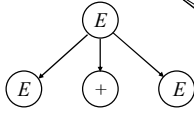
- E



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más izquierda

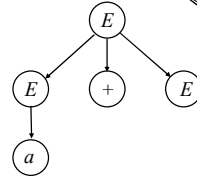
- $E \Rightarrow E + E$



Dr. Luis Pineda, IHMAS, 2010

Derivación más izquierda

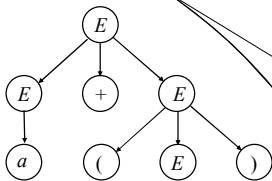
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E$



Dr. Luis Pineda, IHMAS, 2010

Derivación más izquierda

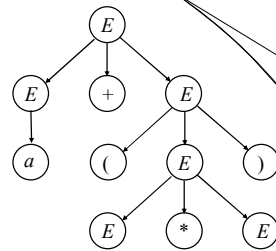
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + (E)$



Dr. Luis Pineda, IHMAS, 2010

Derivación más izquierda

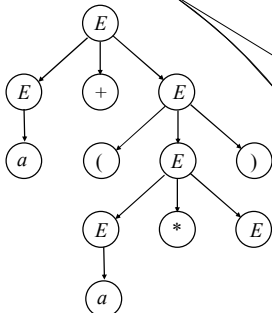
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + (E) \Rightarrow a + (E * E)$



Dr. Luis Pineda, IHMAS, 2010

Derivación más izquierda

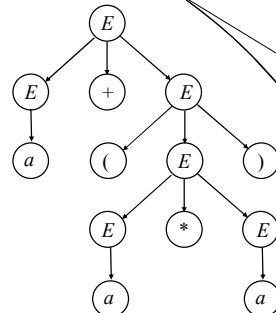
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + (E) \Rightarrow a + (E * E) \Rightarrow a + (a * E)$



Dr. Luis Pineda, IHMAS, 2010

Derivación más izquierda

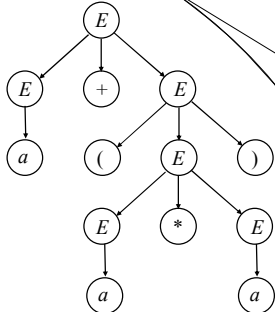
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + (E) \Rightarrow a + (E * E) \Rightarrow a + (a * E) \Rightarrow a + (a * a)$



Dr. Luis Pineda, IHMAS, 2010

Derivación más izquierda

- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + (E) \Rightarrow a + (E * E)$
 $\Rightarrow a + (a * E) \Rightarrow a + (a * a)$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivaciones derechas (rightmost)

- Derivación más derecha: \Rightarrow_{rm}
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E) \Rightarrow E + (E * E)$
 $\Rightarrow E + (E * a) \Rightarrow E + (a * a) \Rightarrow a + (a * a)$
- $E \Rightarrow_{rm}^* a + (a * a)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más derecha

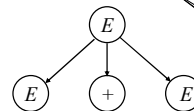
- E



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más derecha

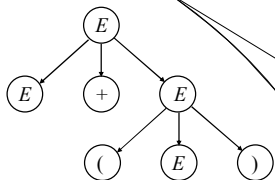
- $E \Rightarrow E + E$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más derecha

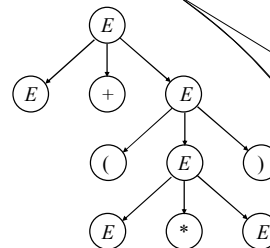
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E)$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más derecha

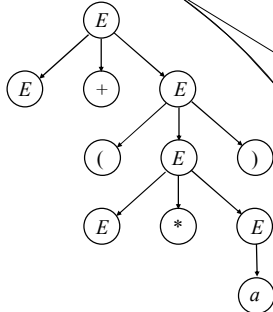
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E) \Rightarrow E + (E * E)$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más derecha

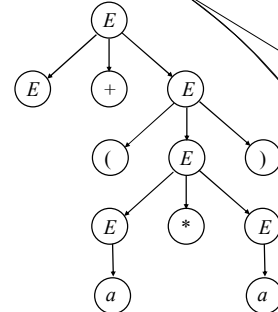
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E) \Rightarrow E + (E * E)$
 $\Rightarrow E + (E * a)$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más derecha

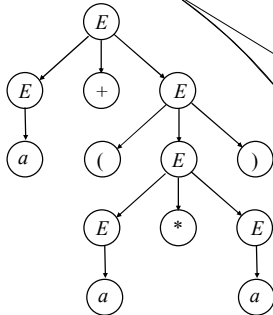
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E) \Rightarrow E + (E * E)$
 $\Rightarrow E + (E * a) \Rightarrow E + (a * a)$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más derecha

- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E) \Rightarrow E + (E * E)$
 $\Rightarrow E + (E * a) \Rightarrow E + (a * a) \Rightarrow a + (a * a)$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

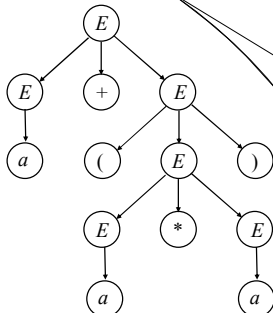
¿Cuántas derivaciones hay?

- Tipos de derivaciones:
 - Más izquierdas
 - Más derechas
 - Combinadas!
- Son equivalentes si generan la misma estructura global

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más izquierda

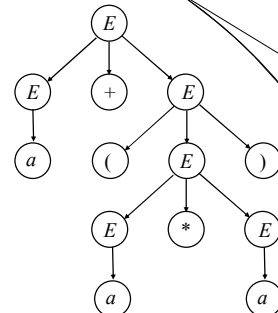
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + (E) \Rightarrow a + (E * E)$
 $\Rightarrow a + (a * E) \Rightarrow a + (a * a)$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación más derecha

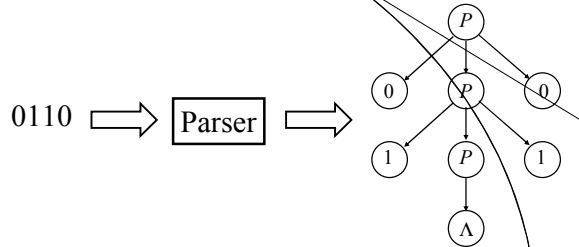
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E) \Rightarrow E + (E * E)$
 $\Rightarrow E + (E * a) \Rightarrow E + (a * a) \Rightarrow a + (a * a)$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Parseo

- Parseo: Inferencia recursiva para obtener la estructura sintáctica de una cadena en el lenguaje



Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Derivación & árbol de parseo

- Si hay una derivación hay también una inferencia recursiva
- Si hay una inferencia recursiva hay también un árbol de parseo
- Si hay un árbol de parseo hay derivaciones más derecha y más izquierda
- Si hay derivaciones más izquierdas y más derechas, hay una derivación!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

El lenguaje de una gramática

- Sea $G = (V, \Sigma, S, P)$ una *GLC*. El lenguaje generado por G es:

$$L(G) = \{x \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* x\}$$

- Si $x \in \Sigma^*$ entonces x no tiene variables!
- El lenguaje generado por una gramática es un conjunto de cadenas!
- Un lenguaje L es *libre de contexto* (*LLC* o context-free *CFL*) si existe una *CFG* G tal que $L = L(G)$

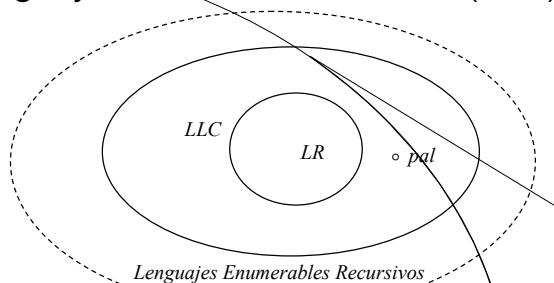
Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

El lenguaje de una gramática

- Formas sentenciales u oracionales:
 - generadas por derivaciones que empiezan con el símbolo inicial &
 - sin variables (i.e. cadenas del lenguaje)
- $L(G)$ consiste de las formas sentenciales u oracionales en Σ^*

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

Lenguajes Libres del Contexto (LLC)



- Todos los *LR* son *LLC* pero no todos los *LLC* son *LR*
- Hay también lenguajes que no son *LLC*

Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010