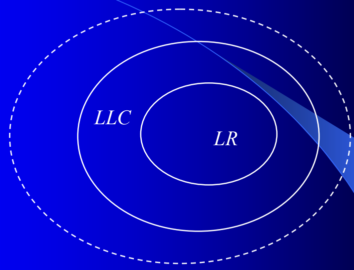
Sesión 15

Gramáticas Libres del Contexto

&

Expresiones Regulares

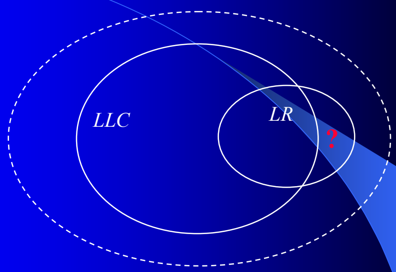
GLC & FA



✓ No todos los *LLC* son *RL* (el lema de bombeo)

- Si *L* es un *LR*, es necesariamente un *LLC*?

GLC and FA



- Si *L* es un *LR* ¿es *L* un *LLC*?
- En dado caso, ¿cuál es la forma de su gramática?

Todos los *LR* son *LLC*

- Toda *ER* tiene una *GLC* equivalente
- Todo FA tiene una *GLC* equivalente:
  - Gramáticas Regulares (*GR*)
- Toda *GR* tiene un FA equivalente
- Toda *RE* tiene una *GR* equivalente

Todos los *LR* son *LLC*

- Todo *LR* es un *LLC*
- Hay una *GLC* para todos los *LR básicos* en Σ:
  - $L(\Phi) = L(G_\Phi)$ donde $G = (V, \Sigma, S, \Phi)$
  - $L(\Lambda) = L(G_\Lambda)$ donde $G_\Lambda = (V, \Sigma, S, \{S \rightarrow \Lambda\})$
  - Si $\boldsymbol{a} \in \Sigma$ entonces $L(\boldsymbol{a}) = \{a\} = L(G_a)$ & $G_a = (V, \Sigma, S, \{S \rightarrow a\})$

Operaciones con *GLC*

- Dadas:
  - $L_1 = L(G_1)$ & $G_1 = (V_1, \Sigma, S_1, P_1)$
  - $L_2 = L(G_2)$ & $G_2 = (V_2, \Sigma, S_2, P_2)$
- $L_u = L_1 \cup L_2 = L(G_u)$ donde
  - $G_u = (V_u, \Sigma, S_u, P_u)$ & $P_u = P_1 \cup P_2 \cup \{S_u \rightarrow S_1 \mid S_2\}$
- $L_c = L_1 L_2 = L(G_c)$ donde
  - $G_c = (V_c, \Sigma, S_c, P_c)$ & $P_c = P_1 \cup P_2 \cup \{S_c \rightarrow S_1 S_2\}$
- $L_* = L_1^* = L(G_*)$ donde
  - $G_* = (V, \Sigma, S, P)$ donde $P = P_1 \cup \{S \rightarrow S_1 S \mid \Lambda\}$

Renombrando las variables

- Los nombres de las variables deben ser únicos:
  - $V_1 \cap V_2 \cap V_u \cap V_c \cap V = \Phi$
- Considerar G_1 & G_2 tales que $V_1 \cap V_2 = X \neq \Phi$
  - $G_1 = (V_1, \Sigma, S_1, \{S_1 \to XA, X \to c, A \to a\})$
  - $G_2 = (V_2, \Sigma, S_2, \{S_2 \to XB, X \to d, B \to b\})$
- L_1 & L_2:
  - $S_1 \Rightarrow XA \Rightarrow cA \Rightarrow ca$ & $L(G_1) = \{ca\}$
  - $S_2 \Rightarrow XB \Rightarrow dB \Rightarrow db$ & $L(G_2) = \{db\}$
- Considerar la gramática unión:
  - $P_u = P_1 \cup P_2 \cup \{S_u \to S_1 \mid S_2\}$
  - $S_u \Rightarrow S_1 \mid S_2 \Rightarrow XA \Rightarrow dA \Rightarrow da \notin L_1 \cup L_2$

ER son *GLC*

- LA *GLC* equivalente a $(011 + 1)^*(01)^*$
- Producciones de básicas: $P_1 = \{A \to 1\}$ and $P_2 = \{B \to 1\}$
  $A \Rightarrow 1$ & $B \Rightarrow 1$ $\{1\}$ & $\{1\}$
- Concatenación: $P_c = \{A \to 1\} \cup \{B \to 1\} \cup \{C \to AB\}$
  $C \Rightarrow AB \Rightarrow 1B \Rightarrow 11$ $\{11\}$
- Concatenación otra vez: $P_c = \{D \to 0\} \cup \{C \to AB\} \cup \{E \to DC\}$
  $E \Rightarrow DC \Rightarrow 0C \Rightarrow 011$ $\{011\}$
- Unión: $P_u = \{E \to DC\} \cup \{F \to 1\} \cup \{G \to E \mid F\}$
  $G \Rightarrow E \mid F \Rightarrow 011 \mid F \Rightarrow 011 \mid 1$ $\{011 + 1\}$

ER son *GLC*

- Dar *GLC* para $(011 + 1)^*(01)^*$ (Cont....)
- Cerradura: $P = P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \Lambda\}$
  - $P_1 = \{A \to 011 \mid 1\}$ (Reusando nombres, por claridad)
  - $P_2 = \{A \to 011 \mid 1\} \cup \{B \to AB \mid \Lambda\}$ $\{011 + 1\}^*$

    $B \Rightarrow (011 \mid 1)B$

    $\Rightarrow (011 \mid 1)(011 \mid 1)B$ (AAB)

    …

    $\Rightarrow (011 \mid 1)(011 \mid 1)\ldots(011 \mid 1)\Lambda$ $(AA\ldots A\Lambda)$
- Cerradura: $P_3 = \{C \to 01\} \cup \{D \to CD \mid \Lambda\}$ $\{01\}^*$
- Concatenación: $P_c = P_2 \cup P_3 \cup \{S \to BD\}$ $\{011 + 1\}^*\{01\}^*$

ER son *GLC*

- $ER = (011 + 1)^*(01)^*$
- La GLC equivalente es:

  $G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, S, P)$

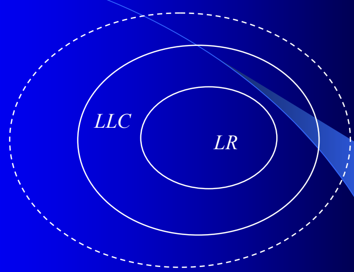
  donde P contiene las producciones:

$A \to 011 \mid 1$	$\{011 + 1\}$
$B \to AB \mid \Lambda$	$\{011 + 1\}^*$
$C \to 01$	$\{01\}$
$D \to CD \mid \Lambda$	$\{01\}^*$
$S \to BD$	$\{011 + 1\}^*\{01\}^*$

Propiedades de *LLC* & *GLC*

- Dados dos *LLC* y sus respectivas gramáticas:
  - $L_1 = L(G_1)$ & $G_1 = (V_1, \Sigma, S_1, P_1)$
  - $L_2 = L(G_2)$ & $G_2 = (V_2, \Sigma, S_2, P_2)$
- La unión $L_u = L_1 \cup L_2 = L(G_u)$ es un *LLC* &
  - $G_u = (V_u, \Sigma, S_u, P_u)$ & $P_u = P_1 \cup P_2 \cup \{S_u \to S_1 \mid S_2\}$
- La concatenación $L_c = L_1 L_2 = L(G_c)$ es un *LLC*
  - $G_c = (V_c, \Sigma, S_c, P_c)$ & $P_c = P_1 \cup P_2 \cup \{S_c \to S_1 S_2\}$
- La cerradura $L_* = L_1^* = L(G_*)$ es un *LLC* &
  - $G_* = (V, \Sigma, S, P)$ donde $P = P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \Lambda\}$

GLC & *ER*



✓ No todos los *LLC* son *LR*

✓ Si *L* es regular entonces *L* es un *LLC*

Todos los *LR* son *LLC*

✓Toda *ER* tiene una *GLC* equivalente

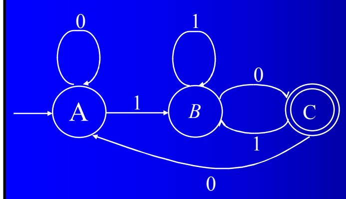
- Todo FA tiene una *GLC* equivalente:
  - Gramáticas Regulares (*GR*)
- Toda *GR* tiene un FA equivalente
- Toda *RE* tiene una *GR* equivalente

¿Cuál es la forma de una *GLC* para un *LR*

✓Toda *RE* tiene una *GLC* equivalente

- Todo FA tiene una *GLC* equivalente:
  - Gramáticas Regulares (*GR*)
- Toda *GR* tiene un FA equivalente
- Toda *RE* tiene una *GR* equivalente

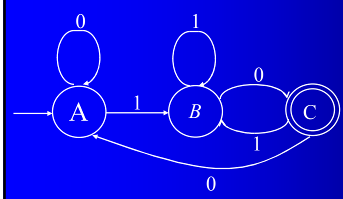
GLC de un FA



Un viejo amigo!

$\delta^*(A, \Lambda) = A$
$\delta^*(A, \Lambda 1) = B$
$\delta^*(A, \Lambda 11) = B$
$\delta^*(A, \Lambda 110) = C$
$\delta^*(A, \Lambda 1100) = A$
$\delta^*(A, \Lambda 11000) = A$
$\delta^*(A, \Lambda 110001) = B$
$\delta^*(A, \Lambda 1100010) = C$
$\delta^*(A, \Lambda 11000101) = B$
$\delta^*(A, \Lambda 110001010) = C$

GLC de un FA



$\delta^*(A, \Lambda) \Rightarrow A$
$\delta^*(A, \Lambda 1) \Rightarrow B$
$\delta^*(A, \Lambda 11) \Rightarrow B$
$\delta^*(A, \Lambda 110) \Rightarrow C$
$\delta^*(A, \Lambda 1100) \Rightarrow A$
$\delta^*(A, \Lambda 11000) \Rightarrow A$
$\delta^*(A, \Lambda 110001) \Rightarrow B$
$\delta^*(A, \Lambda 1100010) \Rightarrow C$
$\delta^*(A, \Lambda 11000101) \Rightarrow B$
$\delta^*(A, \Lambda 110001010) \Rightarrow C$

GLC de un FA

$\delta^*(q_0, ya) = \delta(\delta^*(q_0, y), a)$

$\delta^*(A, \Lambda) = A$
$\delta^*(A, \Lambda 1) = B$
$\delta^*(A, \Lambda 11) = B$
$\delta^*(A, \Lambda 110) = C$
$\delta^*(A, \Lambda 1100) = A$
$\delta^*(A, \Lambda 11000) = A$
$\delta^*(A, \Lambda 110001) = B$
$\delta^*(A, \Lambda 1100010) = C$
$\delta^*(A, \Lambda 11000101) = B$
$\delta^*(A, \Lambda 110001010) = C$

GLC de un FA

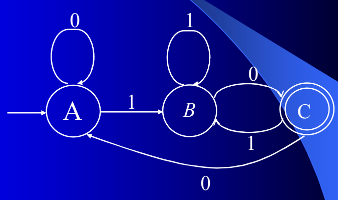
$\delta^*(q_0, ya) = \delta(\delta^*(q_0, y), a)$

$\delta^*(A, \Lambda) = A$
$\delta^*(A, A1) = B$
$\delta^*(A, B1) = B$
$\delta^*(A, B0) = C$
$\delta^*(A, C0) = A$
$\delta^*(A, A0) = A$
$\delta^*(A, A1) = B$
$\delta^*(A, B0) = C$
$\delta^*(A, C1) = B$
$\delta^*(A, B0) = C$

GLC de un FA

$\delta^*(q_0, ya) = \delta(\delta^*(q_0, y), a)$

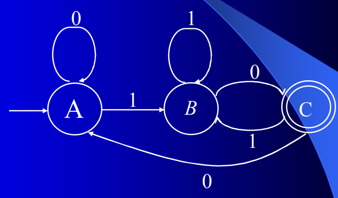
$\delta^*(\mathrm{A}, \Lambda) = \mathrm{A}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{A}1) = \mathrm{B}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{B}1) = \mathrm{B}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{B}0) = \mathrm{C}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{C}0) = \mathrm{A}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{A}0) = \mathrm{A}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{A}1) = \mathrm{B}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{B}0) = \mathrm{C}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{C}1) = \mathrm{B}$
$\delta^*(\mathrm{A}, \mathrm{B}0) = \mathrm{C}$



GLC de un FA

$\delta^*(q_0, ya) = \delta(\delta^*(q_0, y), a)$

$\delta(A, 0) = A$
$\delta(A, 1) = B$
$\delta(B, 0) = C$
$\delta(B, 1) = B$
$\delta(C, 0) = A$
$\delta(C, 1) = B$

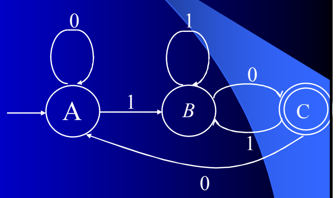


GLC de un FA

$\delta^*(q_0, ya) = \delta(\delta^*(q_0, y), a)$

$\delta^*(q_0, x)$ corresponde a $S \Rightarrow^* x$

$\delta(A, 0) = A$	$A \rightarrow 0A$
$\delta(A, 1) = B$	$A \rightarrow 1B$
$\delta(B, 0) = C$	$B \rightarrow 0C$
$\delta(B, 1) = B$	$B \rightarrow 1B$
$\delta(C, 0) = A$	$C \rightarrow 0A$
$\delta(C, 1) = B$	$C \rightarrow 1B$



Las variables corresponden a los estados!

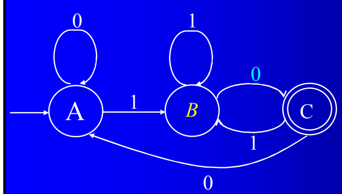
GLC de un FA

Aceptando una cadena:

$\mathrm{A} \Rightarrow 1B$	$\mathrm{A} \rightarrow 1B$
$\Rightarrow 11B$	$B \rightarrow 1B$
$\Rightarrow 110C$	$B \rightarrow 0C$
$\Rightarrow 1100A$	$C \rightarrow 0A$
$\Rightarrow 11000A$	$A \rightarrow 0A$
$\Rightarrow 110001B$	$A \rightarrow 1B$
$\Rightarrow 1100010C$	$B \rightarrow 0C$
$\Rightarrow 11000101B$	$C \rightarrow 1B$
$\Rightarrow 110001010$	$B \rightarrow 0$

GLC de un FA

La gramática correspondiente:



$A \rightarrow 0A$
$A \rightarrow 1B$
$B \rightarrow 0C$
$B \rightarrow 1B$
$C \rightarrow 0A$
$C \rightarrow 1B$

Producción adicional equivalente a transición a estado aceptor: $B \rightarrow 0$

Gramáticas Regulares (*GR*)

- Una gramática G = (V, Σ, S, P) es regular si toda producción tiene alguna de las dos siguientes formas:
  - $B \rightarrow aC$
  - $B \rightarrow a$

¡La cadena vacía no se genera!

Gramáticas Regulares (*GR*)

- Sea L un LR & $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ un FA tal que $L(M) = L$; Existe una Gramática Regular $G = (V, \Sigma, S, P)$ que acepta a L, cuya definición es:
  - $V = Q$ Las variables de G son los estados de M
  - $S = q_0$ El símbolo inicial de G es el edo. inicial de M
  - $P = \{B \rightarrow aC \mid \delta(B, a) = C\} \cup \{B \rightarrow a \mid \delta(B, a) = F \;\&\; F \in A\}$

GLC de un FA

$M = (\{A, B, C\}, \Sigma, A, \{C\}, \delta)$ $G = (\{A, B, C\}, \Sigma, A, P)$

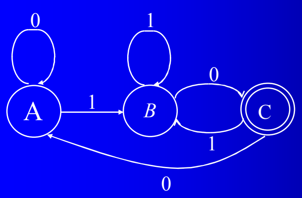
δ:
$\delta(A, 0) = A$
$\delta(A, 1) = B$
$\delta(B, 0) = C$
$\delta(B, 1) = B$
$\delta(C, 0) = A$
$\delta(C, 1) = B$

$\Rightarrow$

P:
$A \rightarrow 0A$
$A \rightarrow 1B$
$B \rightarrow 0C \mid 0$
$B \rightarrow 1B$
$C \rightarrow 0A$
$C \rightarrow 1B$

GLC de un FA

$M = (Q, \Sigma, A, \{C\}, \delta)$ $G = (\{A, B, C\}, \Sigma, A, P)$



$\Rightarrow$

$A \rightarrow 0A$
$A \rightarrow 1B$
$B \rightarrow 0C \mid 0$
$B \rightarrow 1B$
$C \rightarrow 0A$
$C \rightarrow 1B$

¿Cuál es la forma de una *GLC* para un *LR*

✓ Toda *RE* tiene una *GLC* equivalente
✓ Todo FA tiene una *GLC* equivalente:
  – Gramáticas Regulares (*GR*)
- Toda *GR* tiene un FA equivalente
- Toda *RE* tiene una *GR* equivalente

¿Cuál es el FA de una *GR*?

✓ Toda *RE* tiene una *GLC* equivalente
✓ Todo FA tiene una *GLC* equivalente:
  – Gramáticas Regulares (*GR*)
- Toda *GR* tiene un FA equivalente
- Toda *RE* tiene una *GR* equivalente

El FA equivante a una *GR*

- Vamos ahora en la dirección opuesta!

$A \rightarrow 0A$		$\delta(A, 0) = A$
$A \rightarrow 1B$		$\delta(A, 1) = B$
$B \rightarrow 0C$	$\Rightarrow$	$\delta(B, 0) = C$
$B \rightarrow 1B$		$\delta(B, 1) = B$
$C \rightarrow 0A$		$\delta(C, 0) = A$
$C \rightarrow 1B$		$\delta(C, 1) = B$

El FA equivalente a una *GR*

- ¿Cuál es el estado que corresponde a reescribir una varible por un símbolo terminal?

$A \rightarrow 0A$	$\delta(A, 0) = A$
$A \rightarrow 1B$	$\delta(A, 1) = B$
$B \rightarrow 0C$	$\delta(B, 0) = C$
$B \rightarrow 1B$	$\delta(B, 1) = B$
$C \rightarrow 0A$	$\delta(C, 0) = A$
$C \rightarrow 1\mathrm{B}$	$\delta(C, 1) = B$
$B \rightarrow 0$	$\delta(B, 0) = ?$

- ¡Esta producción "llega" a un estado aceptor!

El FA equivalente a una *GR*

- El NFA resultante:

$A \rightarrow 0A$	$\delta(A, 0) = A$
$A \rightarrow 1B$	$\delta(A, 1) = B$
$B \rightarrow 0C$	$\delta(B, 0) = C$
$B \rightarrow 1B$	$\delta(B, 1) = B$
$C \rightarrow 0A$	$\delta(C, 0) = A$
$\mathrm{C} \rightarrow 1B$	$\delta(C, 1) = B$
$B \rightarrow 0$	$\delta(B, 0) = F$

El FA equivalente a una *GR*

- Para todo lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, L es regular si y sólo si existe una *GR* G tal que $L(G) = L - \Lambda$
- Sea L una *GR* $G = (V, \Sigma, S, P)$ tal que $L(G) = L$; existe un NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ como sigue:
  - $Q = V \cup \{f\}$ Los estados de M son las variables de G, con un estado aceptor adicional f
  - $q_0 = S$ El símbolo inicial de G es el estado inicial de M
  - $A = \{f\}$
  - δ se define como sigue:

$$\delta(q, a) = \{p\} \text{ Si } q \rightarrow ap \in P \;\&\; q \rightarrow a \notin P$$

$$\delta(q, a) = \{p\} \cup \{f\} \text{ Si } q \rightarrow ap \in P \;\&\; q \rightarrow a \in P$$

El FA equivalente a una *GR*

- Sea G una Gramática Regular

$$G = (\{A, B, C\}, \{0, 1\}, A, P)$$

donde $P = \{A \rightarrow 0A \mid 1B,$
$B \rightarrow 0C \mid 0 \mid 1B,$
$C \rightarrow 0A \mid 1B\}$

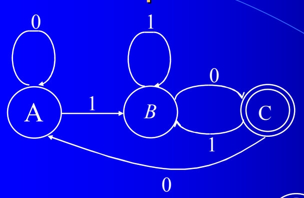
entonces

$$M = (\{A, B, C, F\}, \{0, 1\}, A, \{F\}, \delta),$$

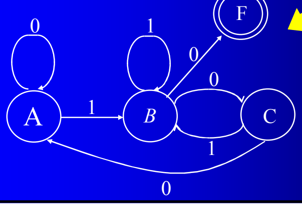
donde δ se define como sigue:

$\delta(A, 0) = \{A\}$	$\delta(A, 1) = \{B\}$
$\delta(B, 0) = \{C, F\}$	$\delta(B, 1) = \{B\}$
$\delta(C, 0) = \{A\}$	$\delta(C, 1) = \{B\}$

Correspondencia entre FA y *GR*



$A \rightarrow 0A$
$A \rightarrow 1B$
$B \rightarrow 0C \mid 0$
$B \rightarrow 1B$
$C \rightarrow 0A$
$C \rightarrow 1B$



¿Cuál es el FA de una *GR*?

✓Toda *RE* tiene una *GLC* equivalente
✓Todo FA tiene una *GLC* equivalente:
  – Gramáticas Regulares (*GR*)
✓Toda *GR* tiene un FA equivalente
- Toda *RE* tiene una *GR* equivalente

Gramática Canónica de una *ER*

- ✓ Toda *RE* tiene una *GLC* equivalente
- ✓ Todo FA tiene una *GLC* equivalente:
  - Gramáticas Regulares (*GR*)
- ✓ Toda *GR* tiene un FA equivalente
- Toda *RE* tiene una *GR* equivalente

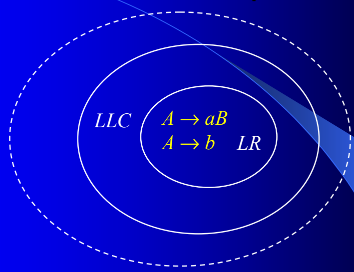
GR equivalente a *ER*

- Existe un NFA-Λ para toda *ER*
  - Teorema de Kleene
- Existe un NFA para todo NFA-Λ
- Existe un DFA para todo NFA
- Exite una *GR* para todo DFA
- Entonces, existe una *GR* para toda *ER*

Gramática Canónica de una *ER*

- ✓ Toda *RE* tiene una *GLC* equivalente
- ✓ Todo FA tiene una *GLC* equivalente:
  - Gramáticas Regulares (*GR*)
- ✓ Toda *GR* tiene un FA equivalente
- ✓ Toda *RE* tiene una *GR* equivalente

Gramática Canónica para un *LR*



- ✓ Si *L* es un lenguaje regular, *L* es un *LLC*
- ✓ Una *GR* es una *GLC* para *L* en una "forma normal"