

# Tema 2

## Lenguajes y Operaciones con lenguajes

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Definición de lenguaje

- Un lenguaje sobre  $\Sigma$  es un subconjunto de  $\Sigma^*$
- $L$  es un lenguaje sobre  $\Sigma$  si  $L \subseteq \Sigma^*$
- ¿Cuántos lenguajes hay para un  $\Sigma$  dado?

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### ¿Cuántos lenguajes hay por alfabeto?

- Sea  $m_0 \dots m_n$  la lista de cadenas finitas formadas con símbolos de  $\Sigma$
- Sea  $S_0 \dots S_n$  la lista de todos los subconjuntos (lenguajes) en  $\Sigma^*$

	$m_0$	$m_1$	$m_2$	...	$m_n$
$S_0$	0	0	0	...	0
$S_1$	0	0	1	...	0
$S_2$	1	0	1	...	0
...	...	...	...	...	...
$S_n$	1	1	1	...	1

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### El conjunto diagonal: $D(i) = S_i(i)$

	$m_0$	$m_1$	$m_2$	...	$m_n$
$S_0$	0	0	0	...	0
$S_1$	0	0	1	...	0
$S_2$	1	0	1	...	0
...	...	...	...	...	...
$S_n$	1	1	1	...	1

$D = \{m_2, \dots, m_n\}$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### El conjunto *anti*-diagonal

	$m_0$	$m_1$	$m_2$	...	$m_n$
$S_0$	1	0	0	...	0
$S_1$	0	1	1	...	0
$S_2$	1	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...
$S_n$	1	1	1	...	0

$\bar{D} = \{m_0, m_1, \dots\}$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### ¿Es el conjunto *anti*-diagonal un lenguaje?

- $\bar{D}$  no está en la lista  $S_0 \dots S_n$ 
  - Difiere de  $S_0$  en el primer elemento
  - Difiere de  $S_1$  en el segundo elemento
  - ...
  - Difiere de  $S_n$  en el elemento  $n + 1$
- El conjunto potencia de  $\Sigma^*$  no es contable!
- $2^{\Sigma^*}$  no es contable!
- Hay más lenguajes de los que nos podemos contar! (¿imaginar?)

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Operaciones de conjuntos sobre lenguajes

- Si  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ 
  - Unión:  $L_1 \cup L_2$  es un lenguaje
  - Intersección:  $L_1 \cap L_2$  es un lenguaje
  - Diferencia:  $L_1 - L_2$  es un lenguaje
- Si  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  y  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  entonces  $L_1$  y  $L_2$  son subconjuntos de  $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$ :
  - $\overline{L_1} = \Sigma_1^* - L_1$
  - $\overline{L_1} = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* - L_1$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Concatenación de lenguajes

- Si  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  la concatenación de  $L_1$  y  $L_2$ ,  $L_1L_2$  es
 
$$L_1L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \ \& \ y \in L_2\}$$
- Ejemplo:
  - $L_1 = \{\text{homo, dis}\}$
  - $L_2 = \{\text{forme, funcional}\}$
  - $L_1L_2 = \{\text{homoforme, homofuncional, disforme, disfuncional}\}$
- Concatenación con  $\{\Lambda\}$ :
  - $\{\Lambda\}L = L\{\Lambda\} = L$
  - $\{\Lambda\}$  es la identidad de concatenación de lenguajes

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Concatenación de Lenguajes

	funcional	homofuncional	disfuncional
	forme	homoforme	disforme
$L_2$ / $L_1$		homo	dis

$$L_1L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \ \& \ y \in L_2\}$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## “Potencias” de un lenguaje

- La concatenación de un lenguaje consigo mismo:
  - $L^0 = \{\Lambda\}$
  - $L^1 = L$
  - $L^2 = L^1L^1$
  - $L^3 = L^2L^1$
  - ...
  - $L^n = L^{n-1}L^1$
- En particular:
  - $L^1 = L^0L^1$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Identidad de concatenación para lenguajes

$\Lambda$	homo $\Lambda$	dis $\Lambda$
$L_2$ / $L_1$	homo	dis

 $\Rightarrow$ 

$\Lambda$	homo	dis
$L_2$ / $L_1$	homo	dis

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerraduras de los lenguajes

- Cerradura de Kleen (Kleen-star)  $L^*$ :

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

- Cerradura de Kleen (Kleen-plus)  $L^+$ :

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerraduras de los lenguajes

- Operación Kleen-star  $L^*$ :
  - $L = \{0, 1\}$  ( $\Sigma = \{0, 1\}$  but  $\Sigma \neq L$ )
  - $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots$
  - $L^* = \{0, 1\}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$
- Operación Kleen-plus  $L^+$ :
  - $L = \{0, 1\}$
  - $L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \dots$
  - $L^+ = \{0, 1\}^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerraduras de los lenguajes

- El lenguaje vacío:  $\Phi$
- El lenguaje con la cadena vacía:  $\{\Lambda\}$
- Lenguajes finitos sin  $\Lambda$
- Lenguajes finitos con  $\Lambda$
- Lenguajes infinitos (denumerables) sin  $\Lambda$
- Lenguajes infinitos (denumerable) con  $\Lambda$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Notación para las potencias

- Si  $a \in \Sigma, x \in \Sigma^* & L \subseteq \Sigma^*$ 
    - $a^k = aa\dots a$   $k$  veces
    - $x^k = xx\dots x$   $k$  veces
    - $\Sigma^k = \Sigma\Sigma\dots\Sigma$   $k$  veces
    - $L^k = LL\dots L$   $k$  veces
  - Para el caso de  $k = 0$ 
    - $a^0 = \Lambda$
    - $x^0 = \Lambda$
    - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
    - $L^0 = \{\Lambda\}$
- Ident. de concatenación de cadenas  
Ident. de concatenación de lenguajes

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerraduras de $\Phi$

- Expansión de las potencias:
  - $\Phi^0 = \{\Lambda\}$
  - $\Phi^1 = \Phi$  (no tiene elementos)
  - $\Phi^2 = \Phi \Phi = \Phi$
  - $\Phi^3 = \Phi \Phi^2 = \Phi \Phi = \Phi$
  - ...
- Cerraduras:
  - $\Phi^* = \Phi^0 = \{\Lambda\}$
  - $\Phi^+ = \Phi^1 = \Phi$  (no tiene elementos)

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerraduras de $\{\Lambda\}$

- Expansión of las potencias:
  - $L^0 = \{\Lambda\}^0 = \{\Lambda\}$
  - $L^1 = L = \{\Lambda\}$
  - $L^2 = L^1L^1 = \{\Lambda\}\{\Lambda\} = \{\Lambda\Lambda\} = \{\Lambda\}$
  - $L^3 = L^1L^2 = \{\Lambda\}\{\Lambda\} = \{\Lambda\Lambda\} = \{\Lambda\}$
  - ...
- Cerraduras:
  - $\{\Lambda\}^* = \{\Lambda\}$
  - $\{\Lambda\}^+ = \{\Lambda\}$
  - Si  $L = \{\Lambda\}$  entonces  $L = L^* = L^+$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerraduras de lenguajes finitos sin $\Lambda$

- Sea  $L = \{0, 1\}$  ( $\Sigma = \{0, 1\}$  pero  $\Sigma \neq L$ )
  - $L^0 = \{\Lambda\}$
  - $L^1 = L = \{0, 1\}$
  - $L^2 = L^1L^1 = \{0,1\}\{0,1\} = \{00,01,10,11\}$
  - $L^3 = L^1L^2 = \{0,1\}\{00,01,10,11\} = \{000, 001,010,011,100,101,110,111\}$
- Cerraduras:
  - $L^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, \dots\}$
  - $L^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, \dots\}$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerraduras de lenguajes finitos sin $\Lambda$

- Sea  $L = \{0, 11\}$  (i.e. dos palabras) ( $\Sigma = \{0, 1\}$ )
  - $L^0 = \{\Lambda\}$
  - $L^1 = L = \{0, 11\}$
  - $L^2 = L^1L^1 = \{0, 11\}\{0, 11\} = \{00, 011, 110, 1111\}$
  - $L^3 = L^2L^1 = \{0, 11\}\{00, 011, 110, 1111\} = \{000, 0011, 01110, 011111, 1100, 11011, 11110, 111111\}$
- $L^n$  es el conjunto de cadenas que resulta de la concatenación de  $n$  cadenas o palabras de  $L$  (NO de los símbolos de  $\Sigma$ )
- Cerraduras:
  - $L^* = \{\Lambda, 0, 11, 00, 011, 110, 1111, 000, 0011, 01110, 011111, \dots\}$
  - $L^+ = \{0, 11, 00, 011, 110, 1111, 000, 0011, 01110, 011111, \dots\}$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Computación gráfica de $L^{n+1}$

$$L^2$$

1111	01111	111111
110	0110	11110
011	0011	11011
00	000	1100
	0	11

$$L^3 = L L^2$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## ¡La concatenación de un lenguaje con sus potencias es conmutativa!

$$L$$

11	0011	01111	11011	111111
0	000	0110	1100	11110
	00	011	110	1111

$$L^2 L = L L^2$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Todo lenguaje conmuta con su cerradura

- $L^+ = L L^* = L^* L$ 
  - $L^* = L^0 + L^1 + L^2 + \dots$
  - $L^+ = L^1 + L^2 + \dots$
- $L L^* = L(L^0 + L^1 + L^2 + \dots)$ 
  - =  $L(\{\Lambda\} + L^1 + L^2 + \dots)$
  - =  $L\{\Lambda\} + LL^1 + LL^2 + \dots$
  - =  $L + L^2 + L^3 + \dots$
  - =  $L^+$
- $L^* L = (L^0 + L^1 + L^2 + \dots)L$ 
  - =  $(\{\Lambda\} + L^1 + L^2 + \dots)L$
  - =  $\{\Lambda\}L + L^1L + L^2L + \dots$
  - =  $L + L^2 + L^3 + \dots$
  - =  $L^+$
- $L\{\Lambda\} + LL^1 + LL^2 + \dots = \{\Lambda\}L + L^1L + L^2L + \dots$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerraduras de lenguajes finitos con $\Lambda$

- Sea  $L = \{\Lambda, 0, 11\}$  ( $\Sigma = \{0, 1\}$ )
  - $L^0 = \{\Lambda\}$
  - $L^1 = L = \{\Lambda, 0, 11\}$  (i.e.  $L^1$  contiene a  $L^0$ )
  - $L^2 = L^1L^1 = \{\Lambda, 0, 11\}\{\Lambda, 0, 11\}$ 
    - =  $\{\Lambda\Lambda, \Lambda 0, \Lambda 11, 0\Lambda, 00, 011, 11\Lambda, 110, 1111\}$
    - =  $\{\Lambda, 0, 11, 0, 00, 011, 11, 110, 1111\}$
    - =  $\{\Lambda, 0, 11, 00, 011, 110, 1111\}$  (i.e.  $L^2$  contiene a  $L$ )
  - $L^2 = L \cup \{0, 11\}\{0, 11\} = L \cup (L^1 - L^0)(L^1 - L^0)$
  - $L^3 = L^2L^1 = L^2 \cup (L^1 - L^0)(L^2 - L^1)$
- Cerraduras:
  - $L^* = \{\Lambda, 0, 11, 00, 011, 110, 1111, \dots\}$
  - $L^+ = \{\Lambda, 0, 11, 00, 011, 110, 1111, \dots\}$
  - $L^* = L^+$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cálculo de $L^3$

$$L^2$$

1111	$\Lambda$ 1111	01111	111111
110	$\Lambda$ 110	0110	11110
011	$\Lambda$ 011	0011	11011
00	$\Lambda$ 00	000	1100
11	$\Lambda$ 11	011	1111
0	$\Lambda$ 0	00	110
$\Lambda$	$\Lambda\Lambda$	0 $\Lambda$	11 $\Lambda$
	$\Lambda$	0	11

$$L$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Cálculo de $L^3$ : aplicando la id.

¡ $\Lambda$  es un reproductor de lenguajes!

	$L^2$	$L^2$		
	1111	1111	01111	111111
	110	110	0110	11110
	011	011	0011	11011
	00	00	000	1100
	11	11	011	1111
	0	0	00	110
	$\Lambda$	$\Lambda$	0	11
		$\Lambda$	0	11

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### The contribution of $L^3$ : $(L^1 - L^0)(L^2 - L^0)$

	$L^2$	$L^2$		
	1111	1111	01111	111111
	110	110	0110	11110
	011	011	0011	11011
	00	00	000	1100
	11	11	011	1111
	0	0	00	110
	$\Lambda$	$\Lambda$	0	11
		$\Lambda$	0	11

$$L^3 = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup (L^1 - L^0)(L^2 - L^0)$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### La contribución de $L^3$

	$L^2$	$L^2$		
	1111	1111	01111	111111
	110	110	0110	11110
	011	011	0011	11011
	00	00	000	1100
	11	11	011	1111
	0	0	00	110
	$\Lambda$	$\Lambda$	0	11
		$\Lambda$	0	11

$$L^3 = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup (L^1 - L^0)(L^2 - L^1)$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

Si  $\Lambda \in L$

$$L^n = \bigcup_{i=0}^{n-1} L^i \cup (L^1 - L^0)(L^{n-1} - L^{n-2})$$

¿Es verdad?

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Cerraduras de lenguajes infinitos sin $\Lambda$

- Sea  $L = \{0, 00, 000, \dots\}$  ( $\Sigma = \{0\}$ )
  - $L^0 = \{\Lambda\}$
  - $L^1 = L = \{0, 00, 000, \dots\}$
  - $L^2 = L^1 L^1 = \{0, 00, 000, \dots\} \{0, 00, 000, \dots\}$   
 $= \{00, 000, 0000, \dots, 000, 0000, 00000, \dots\}$   
 $= \{00, 000, 0000, 00000, \dots\} = L^1 - \{0\}$
- Cerraduras:
  - $L^* = \{\Lambda, 0, 00, 000, \dots\}$
  - $L^+ = \{0, 00, 000, \dots\}$
  - $L^+ = L$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Enumeración de la concatenación de lenguajes infinitos

	$L$			
...				
000	0000	00000	000000	
00	000	0000	00000	
0	00	000	0000	
	0	00	000	...

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

$$L^2 = \{00,000,000,0000,0000,0000,\dots\}$$

$L$

...	7			
000	4	8		
00	2	5	9	
0	1	3	6	10
	0	00	000	...

$L$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Cerraduras de lenguajes infinitos con $\Lambda$

- Sea  $L = \{\Lambda, 0, 00, 000, \dots\}$  ( $\Sigma = \{0\}$ )
  - $L^0 = \{\Lambda\}$
  - $L^1 = L = \{\Lambda, 0, 00, 000, \dots\}$
  - $L^2 = L^1L^1 = \{\Lambda, 0, 00, 000, \dots\} \{\Lambda, 0, 00, 000, \dots\}$   
 $= \{\Lambda\Lambda, \Lambda 0, \Lambda 00, \Lambda 000, \dots, 0\Lambda, 00, 000, 0000, \dots,$   
 $000, 0000, 00000, \dots\}$   
 $= \{\Lambda, 0, 00, 000, 0000, 00000, \dots\}$
  - $L^2 = L^1$
- Cerraduras:
  - $L^* = \{\Lambda, 0, 00, 000, \dots\}$
  - $L^+ = \{\Lambda, 0, 00, 000, \dots\}$
  - $L^* = L^+ = L$  y, además,  $L^{i+1} = L^i$  para todo  $i > 0$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### La cerradura otra vez!

- Todas las cadenas formadas por 0 o más elementos de  $L$ , permitiendo repeticiones, está en  $L^*$ 
  - El primer elemento de la cadena está en  $L$
  - Los primeros *dos* elementos de la cadena están en  $L^2$ , incluso si son el mismo!
  - Los primeros *tres* elementos de la cadena están en  $L^3$ , ya que se componen de la concatenación de  $L^2$  con  $L$ , incluso si son el mismo
  - ...

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Cerraduras

- La cerradura de  $L = \{0, 1\}$  es el conjunto de todas las cadenas formadas por 0, 1 &  $\Lambda$
- 100111 pertenece a la cerradura:
  - 100111 pertenece a  $L$
  - 100111 pertenece a  $L^2$
  - 100111 pertenece a  $L^3$
  - 100111 pertenece a  $L^4$
  - 100111 pertenece a  $L^5$
  - 100111 pertenece a  $L^6$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Cerraduras

- La cerradura de  $L = \{10, 111\}$  es el conjunto de todas las cadenas formadas por 10 y 111, incluyendo repeticiones y  $\Lambda$ :
- 10111111 pertenece a la cerradura:
  - 10111111 pertenece a  $L$
  - 10111111 pertenece a  $L^2$
  - 10111111 pertenece a  $L^3$
- Pero 101111 no está incluida!
  - 101111 pertenece a  $L^1$
  - 101111 pertenece a  $L^2$
  - 101111 no pertenece a ninguna potencia de  $L!$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Cerraduras

- La cerradura de  $L = \{11, 111, 11111, 1111111, \dots\}$  es el conjunto de cadenas formadas por una secuencia de números primos en notación monádica, y  $\Lambda!$
- 1111111111 pertenece a la cerradura:
  - 1111111111 pertenece a  $L$
  - 1111111111 pertenece a  $L^2$
  - 1111111111 pertenece a  $L^3$
- Hay algún número  $n > 1$  que no esté incluido en la cerradura de  $L$ ?

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Cerradura

- Probablemente es difícil conceptualizar la cerradura de un lenguaje
- Pero es mucho más simple verificar si una cadena está en la cerradura de un lenguaje:
  - Leer la cadena de izquierda a derecha y verificar que cada subcadena pertenece al lenguaje
  - Si la cadena se lee completamente y es posible extraer palabras del lenguaje en cada paso, la cadena está en la cerradura del lenguaje
- Es muy simple generar las cadenas en la cerradura: concatenar todos los símbolos de  $L$ , permitiendo repeticiones, en un orden dado

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Ejemplo 1

- Dar un ejemplo de lenguajes INFINITOS  $L_1, L_2$  sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  donde  $L_1 \not\subseteq L_1L_2$  &  $L_2 \not\subseteq L_1L_2$ . Justificar la respuesta dando cadenas en  $L_1$  y  $L_2$  que no estén en  $L_1L_2$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Ejemplo 1

- Dar un ejemplo de lenguajes INFINITOS  $L_1, L_2$  sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  donde  $L_1 \not\subseteq L_1L_2$  &  $L_2 \not\subseteq L_1L_2$ . Justificar la respuesta dando cadenas en  $L_1$  y  $L_2$  que no estén en  $L_1L_2$
- Asumir:
  - $L_1 = \{a, aa, aaa, \dots\}$
  - $L_2 = \{b, bb, bbb, \dots\}$
  - $L_1L_2 = \{ab, abb, aab, abbb, aabb, aaabb \dots\}$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Ejemplo 1

- Dar un ejemplo de lenguajes INFINITOS  $L_1, L_2$  sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  donde  $L_1 \not\subseteq L_1L_2$  &  $L_2 \not\subseteq L_1L_2$ . Justificar la respuesta dando cadenas en  $L_1$  y  $L_2$  que no estén en  $L_1L_2$
- Asumir:
  - $L_1 = \{a, aa, aaa, \dots\}$
  - $L_2 = \{b, bb, bbb, \dots\}$
  - $L_1L_2 = \{ab, abb, aab, abbb, aabb, aaabb \dots\}$
- Consecuentemente:
  - $L_1 \not\subseteq L_1L_2$  &  $L_2 \not\subseteq L_1L_2$
  - En particular,  $a^k \in L_1$  pero  $a^k \notin L_1L_2$
  - De manera similar,  $b^k \in L_2$  pero  $b^k \notin L_1L_2$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Ejemplo 2

- Dar un ejemplo de lenguajes  $L_1, L_2$  y  $L_3$  tales que  $(L_1 \cap L_2)L_3 \neq (L_1L_3) \cap (L_2L_3)$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

## Ejemplo 2

- Dar un ejemplo de lenguajes  $L_1, L_2$  y  $L_3$  tales que  $(L_1 \cap L_2)L_3 \neq (L_1L_3) \cap (L_2L_3)$
- Sea  $L_1 = \{\Lambda\}$ ,  $L_2 = \{a, b\}^+ = \Sigma^+$  y  $L_3 = \{a, b\}^* = \Sigma^*$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Ejemplo 2

- Dar un ejemplo de lenguajes  $L_1, L_2$  y  $L_3$  tales que  $(L_1 \cap L_2)L_3 \neq (L_1L_3) \cap (L_2L_3)$
- Sea  $L_1 = \{\Lambda\}, L_2 = \{a, b\}^+ = \Sigma^+$  y  $L_3 = \{a, b\}^* = \Sigma^*$
- Lado izquierdo:
 
$$\begin{aligned} (L_1 \cap L_2)L_3 &= (\{\Lambda\} \cap \Sigma^+) \Sigma^* \\ &= \Phi \Sigma^* \\ &= \Phi \end{aligned}$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Ejemplo 2

- Dar un ejemplo de lenguajes  $L_1, L_2$  y  $L_3$  tales que  $(L_1 \cap L_2)L_3 \neq (L_1L_3) \cap (L_2L_3)$
- Sea  $L_1 = \{\Lambda\}, L_2 = \{a, b\}^+ = \Sigma^+$  y  $L_3 = \{a, b\}^* = \Sigma^*$
- Lado izquierdo:
 
$$\begin{aligned} (L_1 \cap L_2)L_3 &= (\{\Lambda\} \cap \Sigma^+) \Sigma^* \\ &= \Phi \Sigma^* \\ &= \Phi \end{aligned}$$
- Lado derecho:
 
$$\begin{aligned} (L_1L_3) \cap (L_2L_3) &= (\{\Lambda\}\Sigma^*) \cap (\Sigma^+\Sigma^*) \\ &= \Sigma^* \cap \Sigma^+ \\ &= \Sigma^+ \end{aligned}$$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Ejemplo 2

- Dar un ejemplo de lenguajes  $L_1, L_2$  y  $L_3$  tales que  $(L_1 \cap L_2)L_3 \neq (L_1L_3) \cap (L_2L_3)$
- Sea  $L_1 = \{\Lambda\}, L_2 = \{a, b\}^+ = \Sigma^+$  y  $L_3 = \{a, b\}^* = \Sigma^*$
- Lado izquierdo:
 
$$\begin{aligned} (L_1 \cap L_2)L_3 &= (\{\Lambda\} \cap \Sigma^+) \Sigma^* \\ &= \Phi \Sigma^* \\ &= \Phi \end{aligned}$$
- Lado derecho:
 
$$\begin{aligned} (L_1L_3) \cap (L_2L_3) &= (\{\Lambda\}\Sigma^*) \cap (\Sigma^+\Sigma^*) \\ &= \Sigma^* \cap \Sigma^+ \\ &= \Sigma^+ \end{aligned}$$
- Consecuentemente,  $\Phi \neq \Sigma^+$  y  $(L_1 \cap L_2)L_3 \neq (L_1L_3) \cap (L_2L_3)$

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Resumen

- Dado un alfabeto  $\Sigma$
- Hay un universo de cadenas  $\Sigma^*$
- Un lenguaje  $L$  es un subconjunto de  $\Sigma^*$
- Hay mucho, muchos, subconjuntos de  $\Sigma^*$ :  $2^{\Sigma^*}$
- Algunos de estos son finitos; otros infinitos pero contables
- Dado un conjunto de lenguajes iniciales, es posible generar nuevos lenguajes a través de las operaciones de conjuntos, la concatenación y las operaciones de cerradura.

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

### Problemas y lenguajes

- Un problema: dado un lenguaje y una cadena decidir si la cadena pertenece al lenguaje :
  - Especificación declarativa:  $s \in L$
  - Especificación procedural:

$(L, s) \longrightarrow$  Procedimiento de decisión: El algoritmo  $\longrightarrow$  Si o no!

- Dos lados de la moneda:
  - Generar todas las cadenas del lenguaje
  - Verificar si una cadena dada pertenece al lenguaje

Dr. Luis Pindea, IIMAS-UNAM, 2010

