Sesión 24

Lema de bombeo para *LLC*

¿Cómo podemos decir si un lenguaje es libre del contexto?

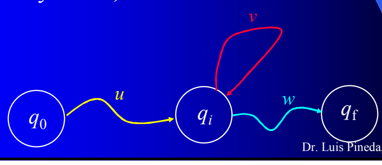
- Definir una GLC o diseñar un AP para el lenguaje
- Pero que tal si el lenguaje se describe por otros medios:
  - $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$
  - ¿Es este lenguaje un *LLC*?

¿Cómo podemos decir si un lenguaje es libre del contexto?

- Usar el Lema del bombeo para *LLC*
  - Aumir que *L* es un *LLC*
  - Si se llega a una contradicción *L* no lo es
- Antecedentes:
  - Forma Normal de Chomsky (1959)
  - Debido a Bar-Hillel, Perles & Shamir (1961)
  - El lema de bombeo para los *LR*s es una simplificación del lema de bombeo para *LLC*

El lema de bombeo para *LR*

- Supongamos que L es un LR reconocido por un FA con n estados; entonces, para todo $x \in L$ con $|x| \geq n$, $x = uvw$ para las cadenas u, v, w que satisfacen:
  - $|uv| \leq n$
  - $|v| > 0$
  - For any $m \geq 0$, $uv^m w \in L$



El "ciclo" en cadenas de *LLC*

- Si una derivación es suficientemente larga, alguna variable se tiene que repetir:

  $S \Rightarrow^* vAz \Rightarrow^* vwAyz \Rightarrow^* vwxyz$

  donde $v, w, x, y, z \in \Sigma^*$
- Los contextos que están antes y después de las variables en el lado derecho de una producción (e.g. w & y en $A \rightarrow wAy$) se bombea con la repetición de dicha variable en la derivación:

  $S \Rightarrow^* vAz \Rightarrow^* vwAyz \Rightarrow^* vw^2Ay^2z \Rightarrow^* vw^3Ay^3z$
  $\Rightarrow^* \ldots$

El "ciclo" en cadenas de *LLC*

- Bombeando w & y
- Si x se deriva de A ($A \Rightarrow^* x$):

  $vAz \Rightarrow^* vxz \in L$

  $vwAyz \Rightarrow^* vwxyz \in L$

  $vw^2Ay^2z \Rightarrow^* vw^2xy^2z \in L$

  $vw^3Ay^3z \Rightarrow^* vw^3xy^3z \in L$

  …

El lema de bombeo para *LLC*

- Sea $G = (V, \Sigma, S, P)$ una GLC en FNC con un total de p variables. Toda cadena u en $L(G)$ con $|u| \geq 2^{p+1}$ pueden escribirse como $u = vwxyz$, para las cadenas v, w, x, y & z que satisfacen:
  - $|wy| > 0$
  - $|wxy| \leq 2^{p+1}$
  - Para toda $m \geq 0$, $vw^m xy^m z \in L$

El lema de bombeo para *LLC*

- Las condiciones no vienen de Marte: para toda $u = vwxyz$
  - (i) $|u| \geq 2^{p+1}$
  - (ii) $|wy| > 0$
  - (iii) $|wxy| \leq 2^{p+1}$
  - para un parámetro p (i.e. el número de variables en V)

La historia en breve...

- Las gramáticas en FNC producen estructuras sintácticas en forma de árboles binarios; sólo los nodos en el último nivel (categorias léxicas) tienen un solo hijo (o hija)
- Un árbol binario de altura h tiene una cosecha $\leq 2^{h-1}$; por lo tanto, un árbol binario con más de 2^{h-1} hojas tiene una altura mayor que h

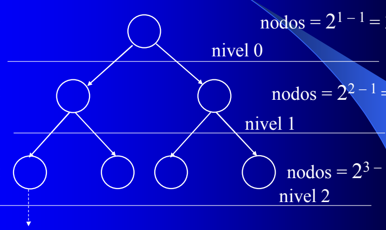
Propiedades de los árboles binarios

- Altura de una trayectoria: número de nodos en la trayectoria
- En un árbol binario <u>completo:</u> número de nodos en el nivel h es 2^{h-1}

altura = 1: nodos = $2^{1-1} = 2^0 = 1$ nivel 0

altura = 2: nodos = $2^{2-1} = 2^1 = 2$ nivel 1

altura = 3: nodos = $2^{3-1} = 2^2 = 4$ nivel 2



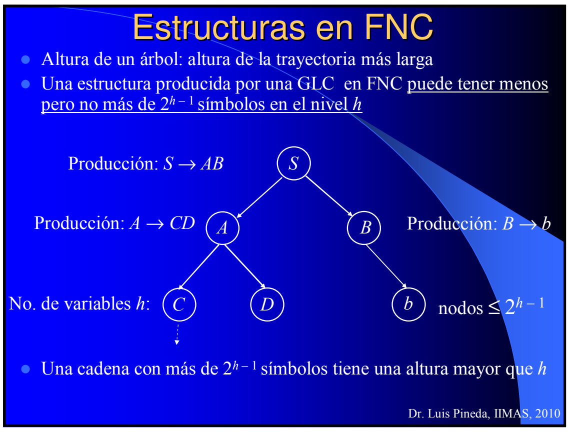
- Derivación u <u>con más de</u> 2^{h-1} símbolos tiene una altura mayor que h
- Nodos en nivel $l = 2^l$ (nivel = altura – 1)

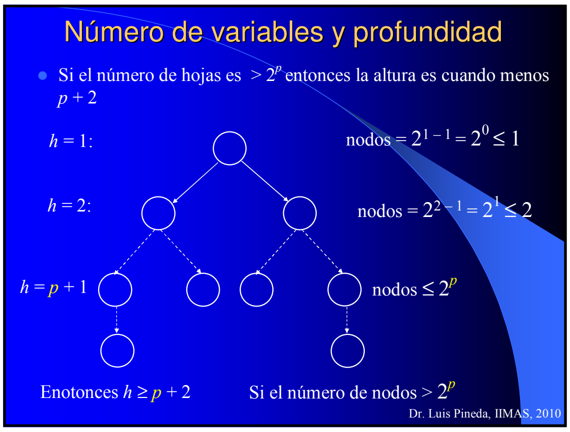
La historia en breve...

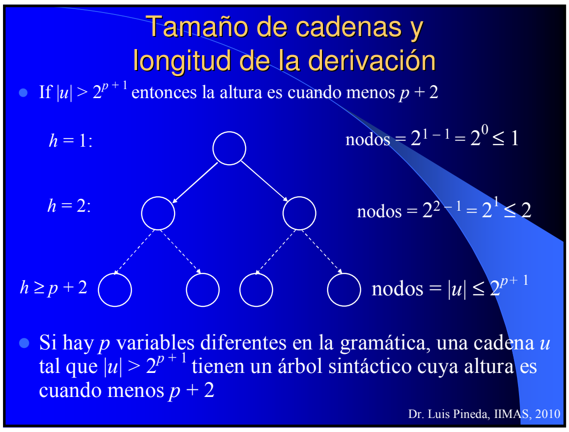
- Si una gramática tiene p variables, una derivación con 2^{p+1} símbolos tiene cuando menos una trayectoria con altura $p + 2$, por lo que cuando menos una variable tiene que repetirse (el último nodo es un símbolo terminal)

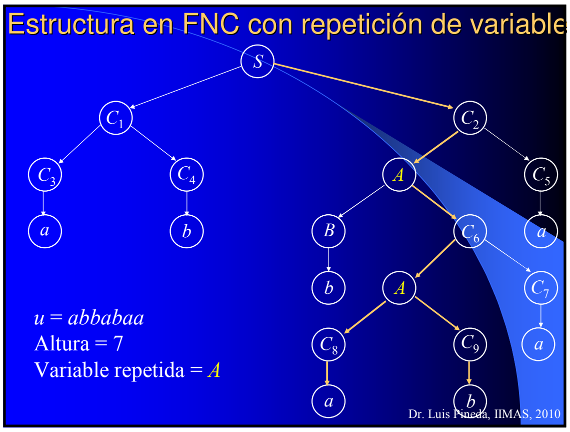
El lema de bombeo para *LLC*

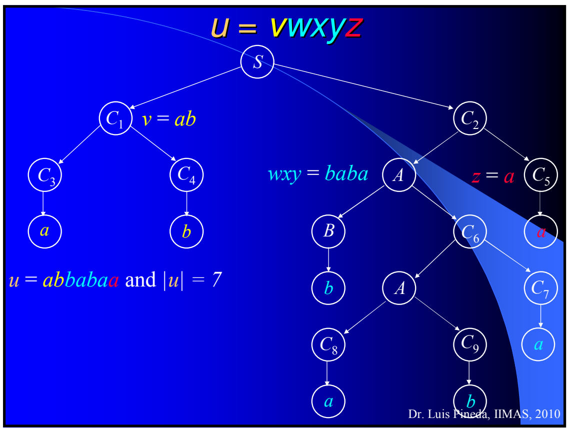
- Las condiciones no vienen de Marte: para toda $u = vwxyz$
  - (i) $|u| \geq 2^{p+1}$
  - (ii) $|wy| > 0$
  - (iii) $|wxy| \leq 2^{p+1}$
  - para un parámetro p (i.e. el número de variables en V)
  - (i) garantiza que u sea suficientemente grande para que una variable se repita
  - (ii) & (iii) son condiciones necesarias en cadenas con variables repetidas

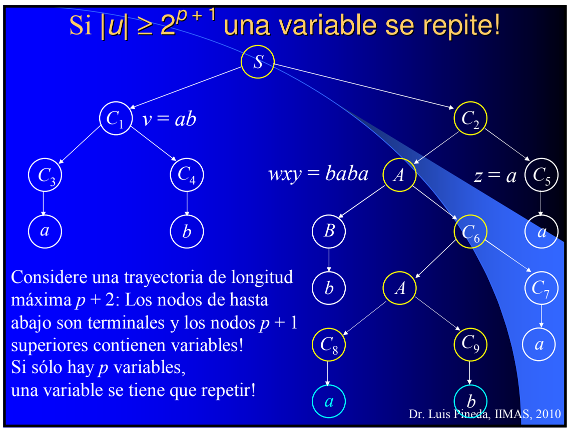

Estructuras en FNC
Altura de un árbol: altura de la trayectoria más larga
Una estructura producida por una GLC en FNC puede tener menos pero no más de 2^{h-1} símbolos en el nivel h
Producción: $S \to AB$
Producción: $A \to CD$
Producción: $B \to b$
No. de variables h:
nodos $\leq 2^{h-1}$
Una cadena con más de 2^{h-1} símbolos tiene una altura mayor que h
Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010


Número de variables y profundidad
Si el número de hojas es $> 2^p$ entonces la altura es cuando menos $p + 2$
$h = 1$:
nodos $= 2^{1-1} = 2^0 \leq 1$
$h = 2$:
nodos $= 2^{2-1} = 2^1 \leq 2$
$h = p + 1$
nodos $\leq 2^p$
Enotonces $h \geq p + 2$
Si el número de nodos $> 2^p$
Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

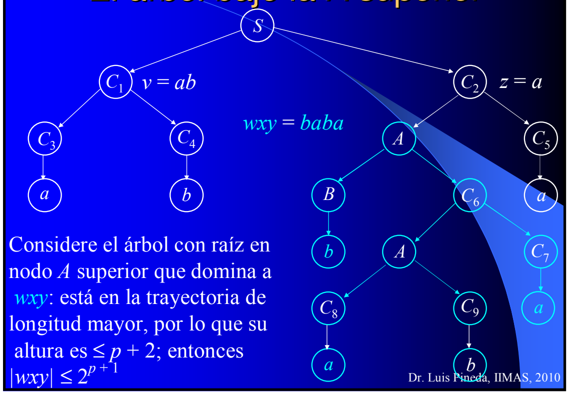

Tamaño de cadenas y longitud de la derivación
If $|u| > 2^{p+1}$ entonces la altura es cuando menos $p + 2$
$h = 1$:
nodos $= 2^{1-1} = 2^0 \leq 1$
$h = 2$:
nodos $= 2^{2-1} = 2^1 \leq 2$
$h \geq p + 2$
nodos $= |u| \leq 2^{p+1}$
Si hay p variables diferentes en la gramática, una cadena u tal que $|u| > 2^{p+1}$ tienen un árbol sintáctico cuya altura es cuando menos $p + 2$
Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010


Estructura en FNC con repetición de variable
$u = abbabaa$
Altura = 7
Variable repetida = A
Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010


$u = vwxyz$
$v = ab$
$wxy = baba$
$z = a$
$u = abbabaa$ and $|u| = 7$
Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

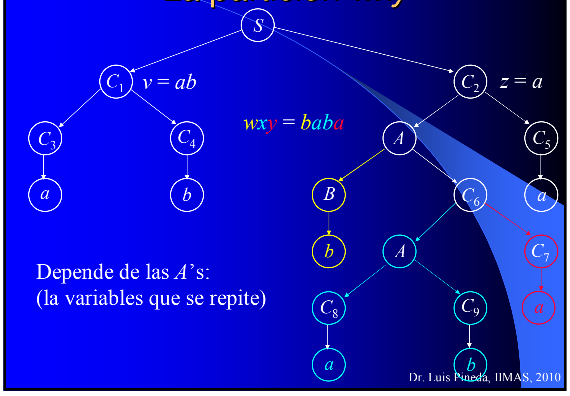

Si $|u| \geq 2^{p+1}$ una variable se repite!
$v = ab$
$wxy = baba$
$z = a$
Considere una trayectoria de longitud máxima $p + 2$: Los nodos de hasta abajo son terminales y los nodos $p + 1$ superiores contienen variables!
Si sólo hay p variables, una variable se tiene que repetir!
Dr. Luis Pineda, IIMAS, 2010

El árbol bajo la *A* superior



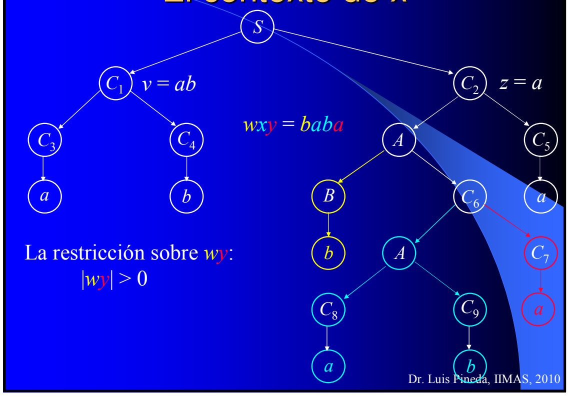
Considere el árbol con raíz en nodo A superior que domina a wxy: está en la trayectoria de longitud mayor, por lo que su altura es $\leq p + 2$; entonces $|wxy| \leq 2^{p+1}$

La partición *wxy*



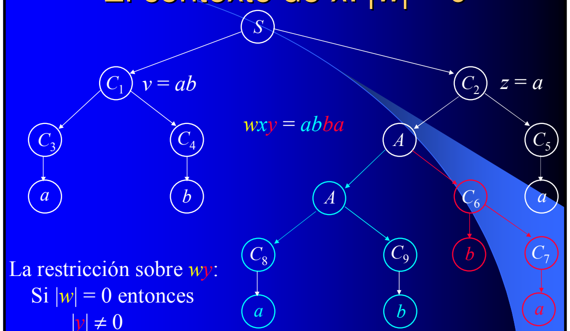
Depende de las A's:
(la variables que se repite)

El contexto de *x*



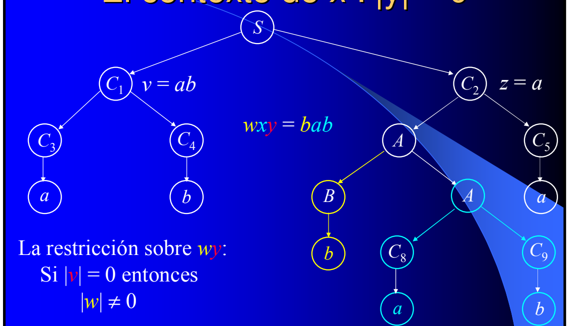
La restricción sobre wy:
$|wy| > 0$

El contexto de *x*: |*w*| = 0



La restricción sobre wy:
Si $|w| = 0$ entonces
$|y| \neq 0$

El contexto de *x* : |y| = 0



La restricción sobre wy:
Si $|y| = 0$ entonces
$|w| \neq 0$

El lema de bombeo para *LLC*

- Pero si no sabemos si L es LLC, no sabemos cual sería su gramática, ni cuantas variables tendría!
- Sea L una CFL. Existe un entero n tal que para toda u que satisface $|u| \geq n$ existen cadenas v, w, x, y & z que satisfacen:
  - $u = vwxyz$
  - $|wy| > 0$
  - $|wxy| \leq n$
  - Y para todo $m \geq 0$, $vw^m xy^m z \in L$

El lema de bombeo para *LLC*

- Prueba:
  - Encontrar una GLC en FNC que genere $L - \{\Lambda\}$.
  - Sea p el número de variables en esta gramática & $n = 2^{p+1}$

Uso del El lema de bombeo para *LLC*

- Determinar si un lenguaje es un *LLC*
  - $L = \{a^i b^i c^i \in \Sigma^* \mid i \geq 1\}$
- Estrategia:
  - Asumir que el lema de bombeo para los *LLC* se satisface para L
  - Si se llega a una contradicción, L no es un *LLC*!

$L = \{a^i b^i c^i \in \Sigma^* \mid i \geq 1\}$

- Sea n la constante & $u = a^n b^n c^n$
  - $|u| = 3n$ (Ok: $n = 2^{p+1}$)
- Particionar u en $vwxyz$ tal que $|wxy| \leq n$ & $|wy| > 0$;
- Dado que $|wxy| \leq n$, esta subcadena tiene <u>cuando más</u> dos tipos de símbolos (sólo a´s o sólo b´s o sólo c´s, o a´s y b´s o b´s y c´s)

$L = \{a^i b^i c^i \in \Sigma^* \mid i \geq 1\}$

- Escoger $m = 0$ en $vw^m xy^m z$
  - Dado que $|wy| > 0$, entonces $|w| > 0$ o $|y| > 0$ (o ambos)
  - Los segmentos de dos símbolos (e.g. a & b) que contienen a w & y tienen menos símbolos (i.e. $m = 0$) que el segmento que incluye al símbolo restante, que no está en wxy (i.e. c)
  - L no es un *LLC*!

$L = \{a^i b^i c^i \in \Sigma^* \mid i \geq 1\}$

Escoger $m = 0$ en $vw^m xy^m z$:

- Caso 1: wxy en el bloque de a's:
  - $w = a^i$, $y = a^j$ & $a^{n-i-j} b^n c^n \notin L$ ya que $i > 0$ o $j > 0$ & $n - i - j < n$
- Caso 2: wxy tiene a's & b's:
  - $a^i b^j c^n \notin L$ ya que $i < n$ o $j < n$ (o ambos) & $i + j < 2n$
- Caso 3: wxy está en las b's:
  - $w = b^i$, $y = b^j$ & $a^n b^{n-i-j} c^n \notin L$ ya que $i > 0$ o $j > 0$ & $n - i - j < n$

$L = \{a^i b^i c^i \in \Sigma^* \mid i \geq 1\}$

Escoger $m = 0$ en $vw^m xy^m z$:

- Caso 4: wxy tiene b's & c's:
  - $a^n b^i c^j \notin L$ ya que $i < n$ o $j < n$ (o ambos) & $i + j < 2n$
- Caso 5: wxy está en las c's:
  - $w = c^i$, $y = c^j$ & $a^n b^n c^{n-i-j} \notin L$ ya que $i > 0$ o $j > 0$ & $n - i - j < n$

$L = \{a^ib^ic^i \in \Sigma^* \mid i \geq 1\}$

- La abstracción:
  - Los segmentos de dos símbolos que contienen *w* & *y* tienen menos símbolos que el segmento que contiene al símbolo que no está en *wxy* (i.e. con $m = 0$)
- Caso 1: *wxy* está en las *a*'s:
- Caso 2: *wxy* tiene *a*'s & *b*'s:
  - $a^ib^jc^n \notin L$
- Caso 3: *wxy* está en las *b*'s:
- Caso 2 incluye a los casos 1 & 3!
  - El segmento $|a^ib^j| < 2n$

$L = \{a^ib^ic^i \in \Sigma^* \mid i \geq 1\}$

- La abstracción:
  - Los segmentos de dos símbolos que contienen *w* & *y* tienen menos símbolos que el segmento que contiene al símbolo que no está en *wxy* (i.e. con $m = 0$)
- Caso 3: *wxy* está en las *b*'s:
- Caso 4: *wxy* tiene *b*'s & *c*'s:
  - $a^nb^ic^j \notin L$
- Caso 5: *wxy* está en las *c*'s:
- El caso 4 incluye a los casos 3 & 5!
  - El segmento $|b^ic^j| < 2n$

$L = \{a^ib^ic^i \in \Sigma^* \mid i \geq 1\}$

- La abstracción:
  - Los segmentos de dos símbolos que contienen *w* & *y* tienen menos símbolos que el segmento que contiene al símbolo que no está en *wxy*
- La abstracción: Sea $m = 0$
  - *p*: El segmento $|a^ib^j| < 2n$ & $a^ib^jc^n \notin L$
  - *q*: El segmento $|b^ic^j| < 2n$ & $a^nb^ic^j \notin L$
  - *L* no es un *LLC* ya que *p* o *q*

$L = \{x \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(x) < n_b(x)\ \&\ n_a(x) < n_c(x)$

- Sea *n* la constante & $u = a^nb^{n+1}c^{n+1}$
  - $|u| = 3n + 2$ (ok: $n = 2^{p+1}$)
- Partición de *u* en *vwxyz* tal que $|wxy| \leq n$ & $|wy| > 0$
  - Otra vez *wxy* tiene cuando más dos tipos de símbolos
- Caso 1:
  - *w* o *y* tienen cuando menos una *a*
  - sea $m = 2$ & $a^ib^jc^{n+1} \notin L$ ya que $i \geq n + 1$ y por lo tanto $a^i \geq c^{n+1}$

$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) < n_b(x)\ \&\ n_a(x) < n_c(x)$

- Sea *n* la constante & $u = a^nb^{n+1}c^{n+1}$
  - $|u| = 3n + 2$ (ok: $n = 2^{p+1}$)
- Partición de *u* en *vwxyz* tal que $|wxy| \leq n$ & $|wy| > 0$
  - Otra vez *wxy* tiene cuando más dos tipos de símbolos
- Caso 2:
  - *w* o *y* no tienen *a's*
  - sea $m = 0$ & $a^nb^ic^j \notin L$ ya que $i < n + 1$ o $j < n + 1$ (o ambos) & $n_a(u) \geq n_b(u)$ o $n_a(u) \geq n_c(u)$

No-*LLC*