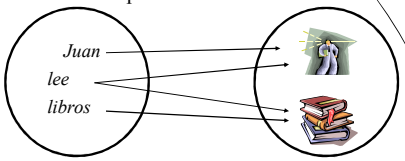
Sesión 3

Expresiones y Lenguajes Regulares

Sintaxis y Semántica

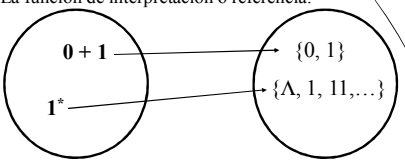
- En su uso normal, las expresiones lingüística hacen referencia a objetos individuales, así como a sus propiedades y relaciones
- Los símbolos lingüísticos son objetos *sintácticos*
- Relación de representación o referencia:



El Lenguaje refiere al Mundo

Sintaxis y Semántica

- Si el lenguaje es el objeto de estudio, necesitamos un lenguaje para hablar del lenguaje
- Los conjuntos de cadenas (i.e los lenguajes) se convierten en objetos *semánticos*
- La función de interpretación o referencia:



El Lenguaje refiere al Mundo

El lenguaje de las Expresiones Regulares

- Sintaxis
  - Constantes básicas (para un Σ dado)
    - Φ es una expresión regular (*ER*)
    - Λ es una *ER*
    - Si $\boldsymbol{a} \in \Sigma$ entonces $\boldsymbol{a}$ es una *ER*
    - Una variable, una italica mayúscula (e.g. *L*), es una *ER*
  - Reglas de composición:
    - Si *E* & *F* son *ER* entonces *E* + *F* es una *ER* (unión)
    - Si *E* & *F* son *ER* entonces *EF* es una *ER* (concatenación)
    - Si *E* es una *ER* entonces E^* es una *ER* (cerradura)
    - Si *E* es una *ER* entonces (*E*) es una *ER* (introducción de paréntesis)
  - Sólo las expresiones construidas por un número FINITO de aplicaciones de estas reglas son *ER*

Una formulación alternativa

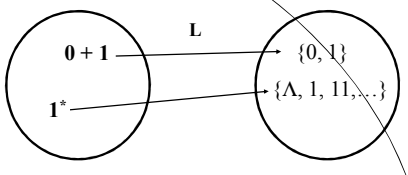
- Sintaxis
  - Constantes básicas (para un Σ dado)
    - Φ es una expresión regular (*ER*)
    - Λ es una *ER*
    - Si $\boldsymbol{a} \in \Sigma$ entonces $\boldsymbol{a}$ es una *ER*
    - Una variable, una italica mayúscula (e.g. *L*), is a *ER*
  - Reglas de composición (Los paréntesis son obligarorios):
    - Si *E* & *F* son *ER* entonces (*E* + *F*) es una *ER* (unión)
    - Si *E* & *F* son *ER* entonces (*EF*) es una *ER* (concatenación)
    - Si *E* es una *ER* entonces (E^*) es una *ER* (cerradura)
  - Sólo las expresiones construidas por un número FINITO de aplicaciones de estas reglas son *ER*

El lenguaje de las Expresiones Regulares

- Semántica:
  - Sea *ER* el conjunto de todas las espresiones regulares sobre Σ, *R* el conjunto de lenguajes regulares y **L** una función de interpretación de *ER* a *R*
  - Interpretación de constantes básicas:
    - **L**(Φ) es Φ (i.e. el lenguaje vacío)
    - **L**(Λ) es {Λ} (i.e. el lenguaje con la cadena vacía)
    - Si $\boldsymbol{a} \in \Sigma$ entonces **L**(***a***) es {*a*} {i.e. el lenguaje con *a*}
    - **L**(***L***) es un lenguaje arbitrario
  - Interpretación de expresiones compuestas:
    - **L**(*E*+*F*) es la unión de **L**(*E*) & **L**(*F*)
    - **L**(*EF*) o **L**(*E.F*) es la concatención de **L**(*E*) & **L**(*F*)
    - **L**(E^*) es (**L**(*E*))* (i.e. la cerradura de L(*E*))
    - **L**((*E*)) es **L**(*E*) (i.e. el mismo lenguaje)

Sintaxis y Semántica

- La función de referencia o interpretación **L**:



- La interpretación de una expresión compuesta es función de:
  - La interpretación de sus partes
  - Su forma de compósición gramatical (i.e. sintáctica)

Ejemplos

ER	Lenguaje
• **Λ**:	{Λ}
• **0**:	{0}
• **001**:	{001}
• **0 + 1**:	{0, 1}
• **0 + 10**:	{0, 10}
• **(1 + Λ)001**:	{1, Λ}{001} = {1001,001}
• **(110)*(0 + 1)**:	{110}*{0, 1}
• **1*10**:	{1}*{10}

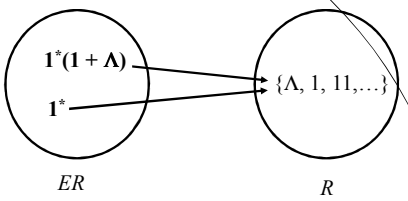
Ejemplos

- … **(10 + 111 + 11010)***: {10, 111, 11010}*
- **(0 + 10)*((11)* + 001 + Λ)**: {0, 10}*{{11}* ∪ {001, Λ}}
- **01* + 1:** {0}{1}* ∪ {1} = {1, 0, 01, 011, …, 011…1}
- **(01)* + 1:** {01}* ∪ {1} = {1, Λ, 01, 0101,…, 0101…01}
- **0(1* + 1):** {0}{{1}* ∪ {1}} = {0, 01, 011,…, 011…1}

En particular: **0(1* + 1) = 01***

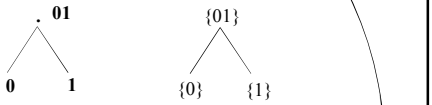
Igualdad entre Expresiones Regulares

- Dos expresiones regulares son iguales si se refieren al mismo lenguaje:



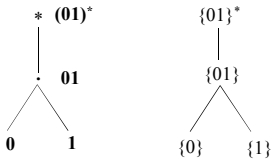
Ejemplo: El lenguaje de 0's y 1's alternados

- Primero: El lenguaje {01}: **01**



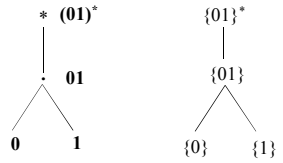
Ejemplo: El lenguaje de 0's y 1's alternados

- Segundo: El lenguaje {01}*: **(01)***



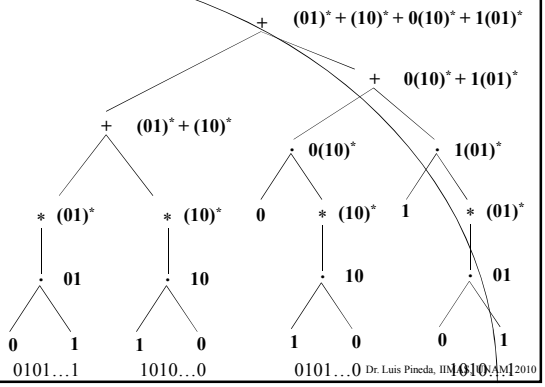
Ejemplo: El lenguaje de 0's y 1's alternados

- Pero también necesitamos:
  - **{0101…0}**
  - **{1010…0}**
  - **{1010…1}**

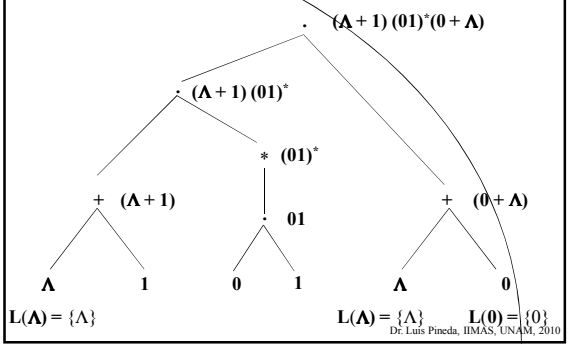


Sintaxis Semántica

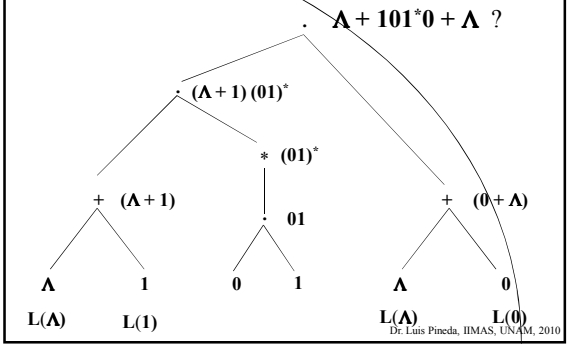
Ejemplo: El lenguaje de 0's y 1's alternados



El poder expresivo de Λ

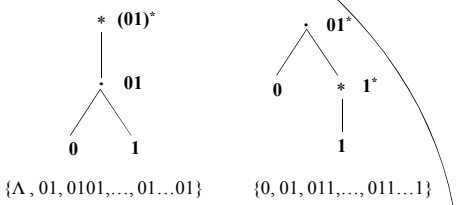


Las *ER* ¿son ambiguas?



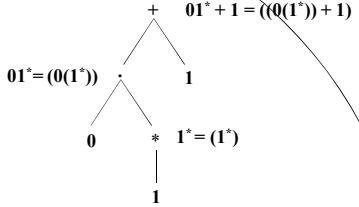
Estructura de las *ER*

- Los operadores se aplican a la estructura que está abajo:



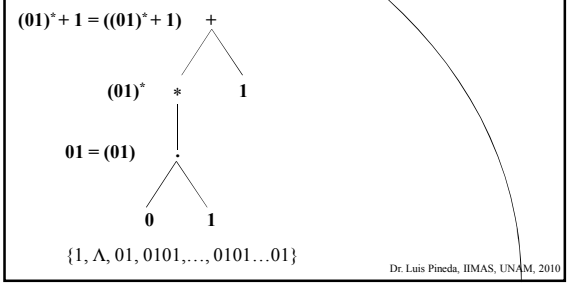
Estructura y ambigüedad

- "Ambigüedad" de : **01* + 1**



Estructura y ambigüedad

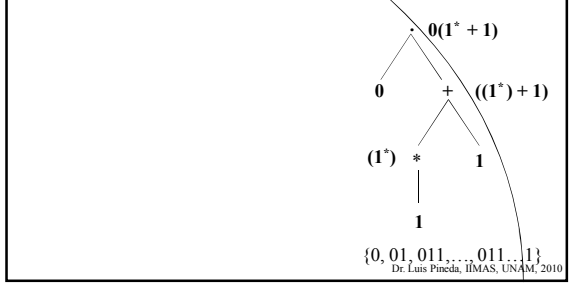
- "Ambigüedad" de : $01^* + 1$



{1, Λ, 01, 0101,…, 0101…01}

Estructura y ambigüedad

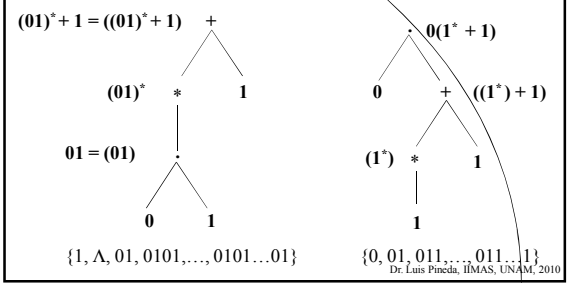
- "Ambigüedad" de : $01^* + 1$



{0, 01, 011,…, 011…1}

Estructura y ambigüedad

- "Ambigüedad" de: $01^* + 1$



{1, Λ, 01, 0101,…, 0101…01}

{0, 01, 011,…, 011…1}

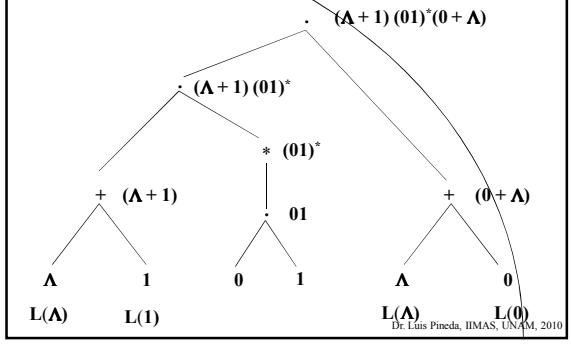
Precedencia de operadores

- Orden de precedencia:
  - Mayor: Operador de cerradura (*)
    - Se aplica a la secuencia más pequeña por su izquierda
  - Siguiente: Operador de concatenación (punto)
    - Juxtaposición de cadenas
    - Cadenas sin operador intermedio se agrupan juntas
    - Asociativo (convencionalmente se agrupa por la izquierda)
  - Menor: El operador de unión (+)
    - Asociativo (convencionalmente se agrupa por la izquierda)

Agrupando al "." por la izquierda

$(\Lambda + 1)\,(01)^*(0 + \Lambda)$

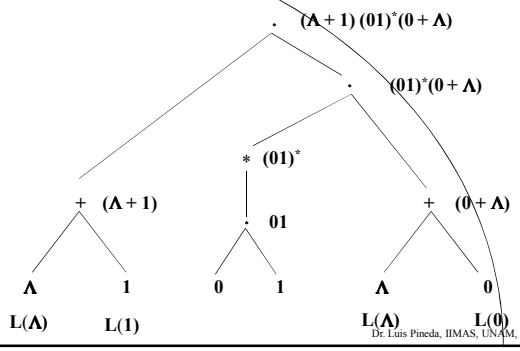
Agrupando al "." por la izquierda



Agrupando al "." por la derecha

$(\Lambda + 1)\,(01)^*(0 + \Lambda)$

Agrupando al "." por la derecha



Precedencia, paréntesis y ambigüedad

- Las *ER* son aparentemente ambiguas, pero
  - Los paréntesis y el orden de precedencia eliminan la ambigüedad
- También:
  - *ER* tienen estructura
  - Los árboles muestran la extructura explícitamente!
  - Las expresiones ambiguas tienen varias estructuras posibles
  - Sólo hay una estructura para cada *ER*
- Tomando en cuenta los paréntesis y la precedencia de operadores, no hay ambigüedad posible
- ¡*ER* no son ambiguas!

Igualdad de expresiones regulares

- Util para la simplificación de expresiones
- Como veremos, útil para simplificar Autómatas (con el menor número de estados posibles)
  - $\mathbf{1^*(1 + \Lambda) = 1^*}$
  - $\mathbf{1^*1^* = 1^*}$
  - $\mathbf{0^* + 1^* = 1^* + 0^*}$
  - $\mathbf{(0^*1^*)^* = (0 + 1)^*}$
  - $\mathbf{(0 + 1)^*01(0 + 1)^* + 1^*0^* = (0 + 1)^*}$
- Existe un método general (un algoritmo) para decidir si dos expresiones denotan al mismo lenguaje

Simplificando *ER*

- $(r + s + rs + sr)^*$

Simplificando *ER*

- $(r + s + rs + sr)^*$
  - *rs* puede formarse tomando *r* & *s*;
  - *sr* puede formarse tomando *s* & *r,*
  - entonces:

$$(r + s + rs + sr)^* = (r + s)^*$$

Simplificando *ER*

- $r(r^*r + r^*) + r^*$

Simplificando *ER*

- $r(r^*r + r^*) + r^*$
  - $r^*r = r^+$
  - $r(r^*r + r^*) + r^* = r(r^+ + r^*) + r^*$
    $= r(r^*) + r^*$
    $= rr^* + r^*$
    $= r^+ + r^*$
    $= r^*$

Interpretando *RE*

- Considere las expresiones regulares:
  - $r = 0^* + 1^*$
  - $s = 01^* + 10^* + 1^*0 + (0^*1)^*$
- Una cadena en *r* pero no en *s*
  - 00
- Una cadena en *s* pero no en *r*
  - 01
- Una cadena en ambas *r* & *s*
  - Hay varias obvias: Λ, 0, 1
- Una cadena en $\{0, 1\}^*$ que no está en *r* ni en *s*
  - Cualquier cadena de forma: 1^i0^i para $i \geq 2$

Encontrar una *RE*

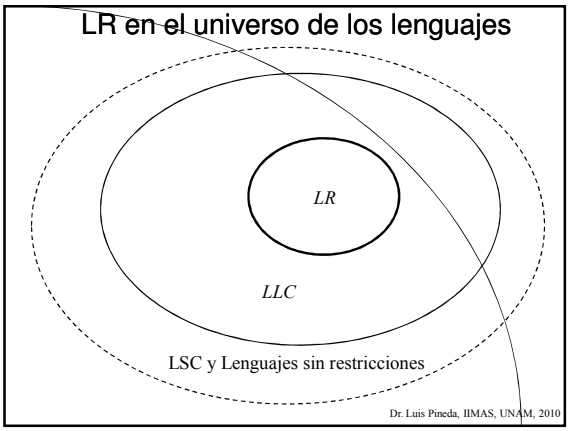
- Dar una expresión regular para el lenguaje:
  - $\{ s \in \{a, b\}^* : |s|$ no es divisible entre $2\}$
- Si $|s|$ es divisible entre 2
  - Su longitud es par (i.e. en otro caso es non)
- *ER* para cadenas de longitud par:
  - $(aa + ab + ba + bb)^*$

Encontrar una *RE*

- Aumentando un símbolo, ya sea *a* o *b* (i.e. cadenas de longitud non):
  - $(aa + ab + ba + bb)^*(a + b)$
- Alternativamente:
  - $(a + b)(aa + ab + ba + bb)^*$
- Introduciendo abstracción:
  - $(a + b)((a + b)(a + b))^*$

Conjuntos regulares

- Lenguajes generados a partir de:
  - Φ, Λ y los símbolos en Σ
- Por medio de:
  - Unión
  - Concatenación
  - Cerradura de Kleen (Kleen-star)
- A través de un número *finito* de operaciones
  - Una expresión regular es una cadena finita!
  - Formalmente, no permitimos elípsis (…)
  - Una árbol es también una estructura finita!
- El conjunto denotado es un subconjunto del conjunto potencia de Σ^* (2^{Σ^*}:), el cual no puede contarse!
- Hay muchos, muchos, lenguajes que no son regulares!


LR en el universo de los lenguajes
LR
LLC
LSC y Lenguajes sin restricciones
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010