

## Sesión 7

### Operaciones de conjuntos con FAs

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Poder expresivo de las ERs y los FAs



Hasta ahora podemos definir FA básicos!  
Pero también necesitamos definir FA  
compuestos a partir de FA básicos!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Operaciones con FA

- De acuerdo con el Teorema de Kleen:
  - $L_1$  &  $L_2$  son LR sobre  $\Sigma$  si y sólo si existen FA  $M_1$  &  $M_2$  que aceptan  $L_1$  &  $L_2$  respectivamente
- Por la definición de LR: Si  $L_1$  &  $L_2$  son LR también lo son:
  - $L_1 \cup L_2$ ,
  - $L_1 L_2$
  - $L_1^*$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Operaciones con FA

- Operaciones de conjuntos sobre LR
  - Unión:  $L_1 \cup L_2$  es un LR
  - Intersección:  $L_1 \cap L_2$  es un LR
  - Diferencia:  $L_1 - L_2$  es un LR
- ¿Hay manera de generar máquinas que acepten estos lenguajes a partir de las máquinas  $M_1$  &  $M_2$  que aceptan los lenguajes  $L_1$  &  $L_2$ ?

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Operaciones de conjuntos con FAs

- El caso para  $L_1 \cup L_2$ 
  - Considere la cadena  $x \in L_1 \cup L_2$
  - $x$  pertenece a la unión si  $x$  pertenece ya sea a  $L_1$  o a  $L_2$
  - Sean  $M_1$  &  $M_2$ 
    - $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$  tal que  $L(M_1) = L_1$
    - $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$  tal que  $L(M_2) = L_2$
  - Procesar (analizar)  $x$  con ambas  $M_1$  &  $M_2$
  - $x \in L_1 \cup L_2$  si  $x$  es aceptada por cualquiera de  $M_1$  o  $M_2$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Operaciones de conjuntos con FAs

- Procesar la cadena  $x$  **simultáneamente** por  $M_1$  &  $M_2$ 
  - $\delta_1^*(q_1, x) = p$
  - $\delta_2^*(q_2, x) = q$
- Tres máquinas relevantes:
  - Si  $p \in A_1$  o  $q \in A_2$  entonces  $x$  se acepta por la unión de  $M_1$  con  $M_2$
  - Si  $p \in A_1$  &  $q \in A_2$  entonces  $x$  se acepta por la intersección de  $M_1$  &  $M_2$
  - Si  $p \in A_1$  &  $q \notin A_2$  entonces  $x$  se acepta por la diferencias de  $M_1$  menos  $M_2$

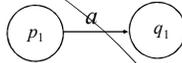
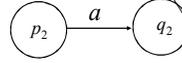
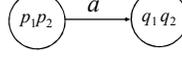
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

## Operaciones de conjuntos con FAs

- El proceso paso a paso:
  - $\delta_1(p, a) = r$  (en la máquina  $M_1$ )
  - $\delta_2(q, a) = s$  (en la máquina  $M_2$ )
- La máquina compuesta se conceptualiza en términos de pares de estados de forma  $(r, s)$  a los que se llega a través del símbolo  $a$  a partir de estados de forma  $(p, q)$ :
  - Se mueve de  $(p, q)$  a  $(\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

## Estados compuestos

- Transición en  $M_1$ : 
- Transición en  $M_2$ : 
- Transición en máquina compuesta: 

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

## Teorema (constructivo)

- Supongamos:
  - $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$  tal que  $L(M_1) = L_1$
  - $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$  tal que  $L(M_2) = L_2$
- Sea  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$  una construcción de  $M_1$  &  $M_2$  como sigue:
  - $Q = Q_1 \times Q_2$
  - $q_0 = (q_1, q_2)$
  - Para todo  $p \in Q_1, q \in Q_2$  &  $a \in \Sigma$ :
 
$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

## Teorema (constructivo)

- Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \text{ o } q \in A_2\}$  entonces  $M$  acepta  $L_1 \cup L_2$
- Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \text{ & } q \in A_2\}$  entonces  $M$  acepta  $L_1 \cap L_2$
- Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \text{ & } q \notin A_2\}$  entonces  $M$  acepta  $L_1 - L_2$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

## Prueba

- Definimos el lenguaje aceptado por la máquina  $M$  mediante la función  $\delta^*$ , que a su vez se define en términos de las funciones  $\delta_1^*$  and  $\delta_2^*$  correspondientes a las máquinas  $M_1$  &  $M_2$ , como sigue:
  - Para todo  $x \in \Sigma^*$  &  $(p, q) \in Q$ :
 
$$\delta^*((p, q), x) = (\delta_1^*(p, x), \delta_2^*(q, x))$$
- La cadena  $x$  se acepta por  $M$  si y solo si
 
$$\delta^*((q_1, q_2), x) \in A$$
 (i.e. Lleva a  $M$  del estado inicial a un estado aceptor)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

## Prueba (cont...)

- Este es el caso si y solo si,
 
$$(\delta_1^*(q_1, x), \delta_2^*(q_2, x)) \in A$$
- El conjunto  $A$  se define para el caso de la unión como sigue:
  - $\delta_1^*(q_1, x) \in A_1$  o  $\delta_2^*(q_2, x) \in A_2$
  - Y de manera similar para los otros dos casos

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA**

FA 1: acepta las cadenas que tienen un 0

FA 2: acepta las cadenas que tienen un 1

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA**

$Q = Q_1 \times Q_2$

<i>s</i>		
<i>r</i>		
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA**

Tabla de transición con 0

<i>s</i>		
<i>r</i>	<i>qr</i>	
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA**

Tabla de transición con 0

<i>s</i>	<i>qs</i>	
<i>r</i>	<i>qr</i>	
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA**

Tabla de transición con 0

<i>s</i>	<i>qs</i>	
<i>r</i>	<i>qr</i>	<i>qr</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA**

Tabla de transición con 0

<i>s</i>	<i>qs</i>	<i>qs</i>
<i>r</i>	<i>qr</i>	<i>qr</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA

Tabla de transición con 1

<i>s</i>	<i>ps</i>	<i>qs</i>
<i>r</i>	<i>ps</i>	<i>qs</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA

Tabla de transición con 0

<i>s</i>	<i>qs</i>	<i>qs</i>
<i>r</i>	<i>qr</i>	<i>qr</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Tabla de transición con 1

<i>s</i>	<i>ps</i>	<i>qs</i>
<i>r</i>	<i>ps</i>	<i>qs</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Teorema (constructivo)

- Sean  $M_1$  &  $M_2$ 
  - $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$  tal que  $L(M_1) = L_1$
  - $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$  tal que  $L(M_2) = L_2$
- Sea  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$  la construcción de  $M_1$  &  $M_2$  como sigue:

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Teorema (constructivo)

- Sea  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$  la construcción de  $M_1$  &  $M_2$  como sigue:
  - El conjunto de estados:  $Q = Q_1 \times Q_2$
  - El estado inicial:  $q_0 = (q_1, q_2)$
  - Para todo  $p \in Q_1, q \in Q_2$  &  $a \in \Sigma$ 

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$
- Esto es lo que hemos construido hasta ahora!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### La gráfica del FA

El conjunto de estados:

Tabla de transición con 0

<i>s</i>	<i>qs</i>	<i>qs</i>
<i>r</i>	<i>qr</i>	<i>qr</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Tabla de transición con 1

<i>s</i>	<i>ps</i>	<i>qs</i>
<i>r</i>	<i>ps</i>	<i>qs</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### La gráfica del FA

El estado inicial:

Tabla de transición con 0

<i>s</i>	<i>qs</i>	<i>qs</i>
<i>r</i>	<i>qr</i>	<i>qr</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Tabla de transición con 1

<i>s</i>	<i>ps</i>	<i>qs</i>
<i>r</i>	<i>ps</i>	<i>qs</i>
	<i>p</i>	<i>q</i>

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**La función de transición del nuevo FA**

Tabla de transición con 0

s	qs	qs
r	qr	qr
	p	q

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**La función de transición del nuevo FA**

Tabla de transición con 1

s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**La función de transición del nuevo FA**

Tabla de transición con 0

s	qs	qs
r	qr	qr
	p	q

Tabla de transición con 1

s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**Los estados aceptores**

- Estados finales:
  - Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \cup q \in A_2\}$  entonces  $M$  acepta  $L_1 \cup L_2$
  - Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \& q \in A_2\}$  entonces  $M$  acepta  $L_1 \cap L_2$
  - Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \& q \notin A_2\}$  entonces  $M$  acepta  $L_1 - L_2$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

**Estados aceptores del FA compuesto**

FA 1: Todas las cadenas con un 0

$A_1 = \{q\}$

FA 2: todas las cadenas con un 1

$A_2 = \{s\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

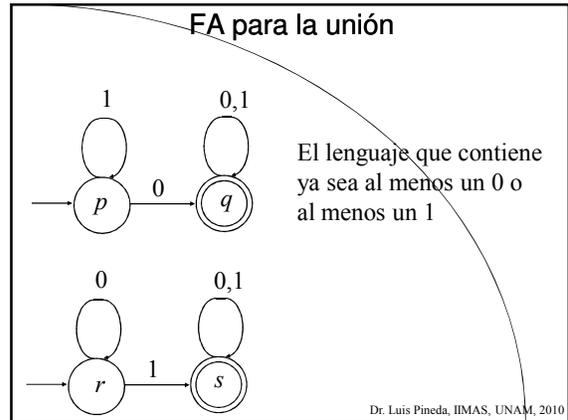
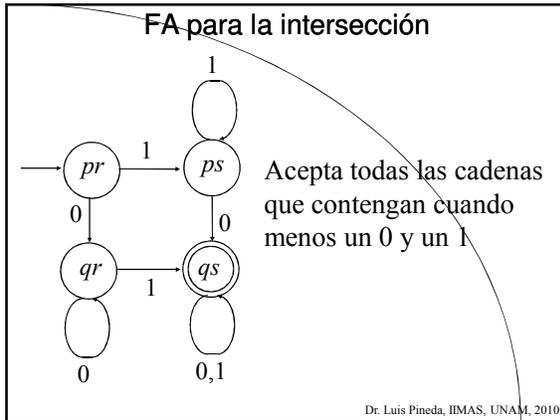
**FA para la intersección**

- Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \& q \in A_2\}$  entonces  $M$  acepta  $L_1 \cap L_2$
- $Q = \{pr, ps, qr, qs\}$
- $A_1 = \{q\} \& A_2 = \{s\}$

Entonces:

- $A = \{qs\}$

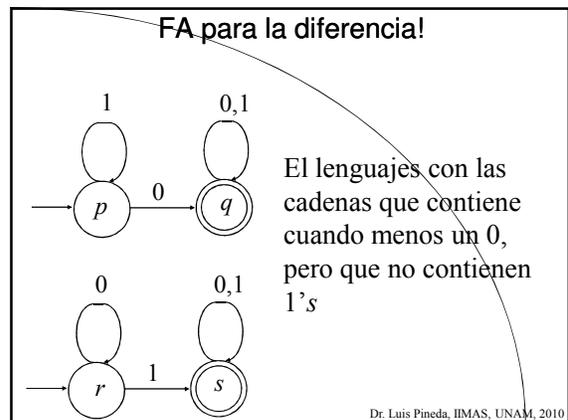
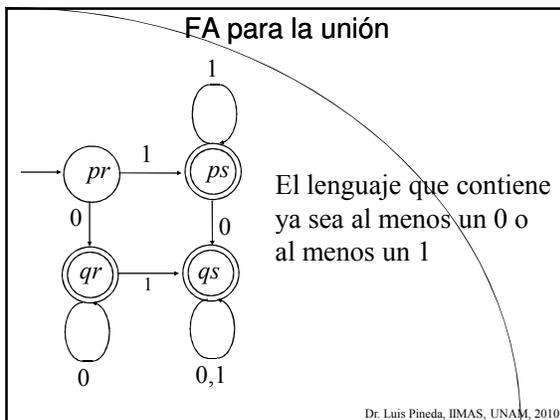
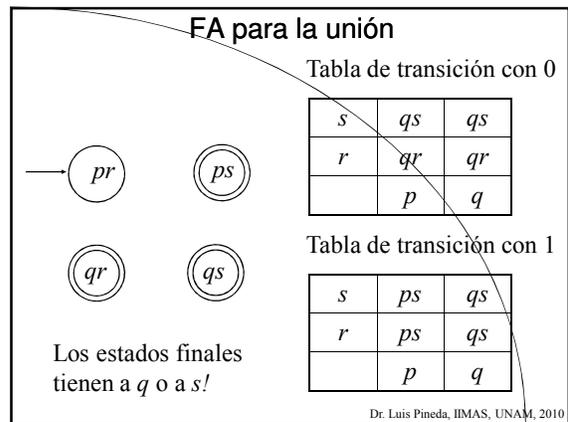
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



### FA para la unión

- Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \text{ O } q \in A_2\}$  entonces  $M$  acepta  $L_1 \cup L_2$ 
  - $Q = \{pr, ps, qr, qs\}$
  - $A_1 = \{q\}$  O  $A_2 = \{s\}$
  - entonces:
  - $A = \{ps, qr, qs\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



### FA para la diferencia!

- Si  $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \ \& \ q \notin A_2\}$   
entonces  $M$  acepta  $L_1 - L_2$
- $Q = \{pr, ps, qr, qs\}$
- $A_1 = \{q\}$  Pero NO  $A_2 = \{s\}$
- entonces:
- $A = \{qr\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### FA para la diferencia!

El lenguaje con las cadenas que contiene cuando menos un 0, pero que no contienen 1s

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Poder expresivo de las ERs y los FAs

Operaciones de conjuntos sobre FAs

Sin embargo, nos hacen falta todavía generar la composición y la cerradura de FAs!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010