

Sesión 9

NFA son FA: La construcción de subconjuntos
(The subset construction)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Los NFAs son FAs

- Para todo NFA
 $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$
 que acepta el lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, existe un FA
 $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$
 que acepta a L
- Para todo NFA, existe un algoritmo que encuentra su DFA equivalente!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Los NFAs son FAs

- Los algoritmos de búsqueda ilustran como todas las trayectorias de un árbol (i.e. “no-determinísticas”) pueden can explorarse determinísticamente:
 - M : NFA es una especificación
 - M_1 : DFA es una implementación!
 - Dada una especificación siempre debe ser siempre posible encontrar una implementación (un algoritmos) automáticamente!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La construcción de subconjuntos

- Prueba: Encontrar un DFA M_1 a partir de la definición de un NFA M
- Encontrar cómo construir M_1 a partir de de la definición de M

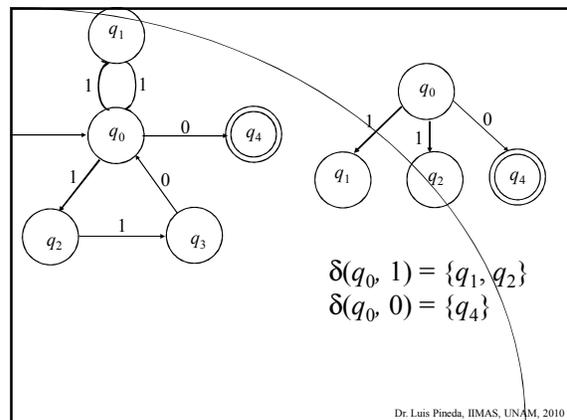
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La construcción de subconjuntos

- M_1 se define como sigue:
 - El conjunto de estados de M_1 : $Q_1 = 2^Q$,
 - El estado inicial de M_1 : $q_1 = \{q_0\}$
 - La función de transición de M_1 :
 Para todo $q \in Q_1$ & $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q, a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r, a)$$
 - El conjunto de estados aceptores de M_1 :
 $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \emptyset\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



$\delta_1(q_0, 1) = q_1q_2$
 $\delta_1(q_0, 0) = q_4$

- La unión de estados:
 - Estado "unión" representa a los estados unidos
 - Surge una transición determinística!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La construcción de subconjuntos

- La función de transición de M_1 :
 Para todo $q \in Q_1$ & $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q, a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r, a)$$

$\delta_1(q_0, 1) = q_1q_2$
 $\delta_1(q_0, 0) = q_4$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

$\delta_1(q_1q_2, 1) = q_0q_3$
 $\delta_1(q_1q_2, 0) = \phi$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El estado coladera: ϕ $\delta_1(q_4, 1) = \phi$
 $\delta_1(q_4, 0) = \phi$

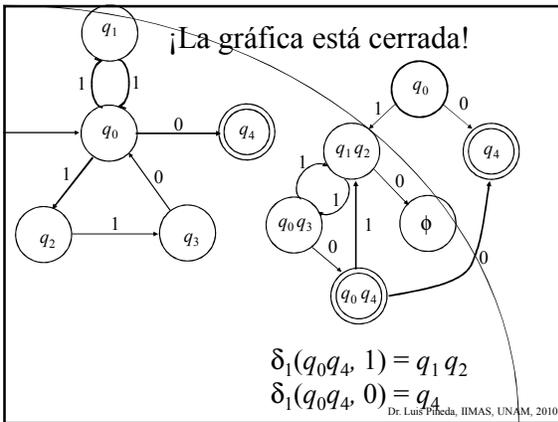
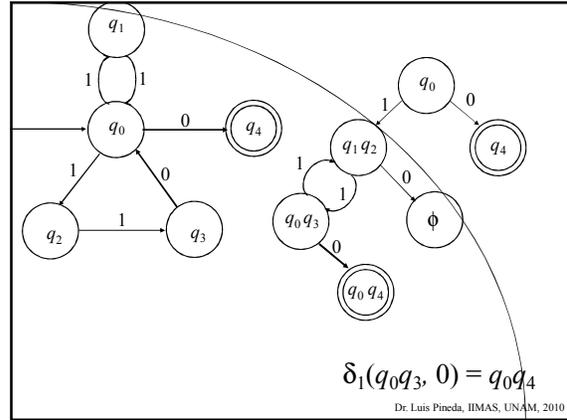
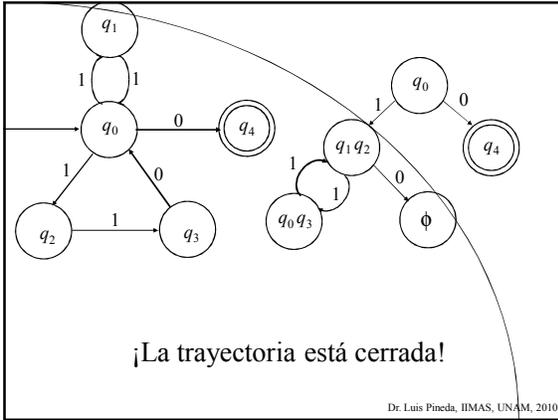
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

$\delta_1(\phi, 1) = q_1q_2$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La trayectoria está cerrada!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



Los estados de la construcción

- Los estados (nombres) de M_1 se definen a partir de los estados (sus nombres) de M :
- M_1 se define como sigue:
 - El conjunto de estados de M_1 : $Q_1 = 2^Q$,
 - El estado inicial de M_1 : $q_1 = \{q_0\}$
- Si M tiene 5 estados:
 - Entonces M_1 tiene $2^5 = 32$ estados posibles!
 - Afortunadamente sólo necesitamos 6!

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El conjunto potencia 2^Q

- Número de conjuntos de n objetos tomados r a la vez!

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
- M tiene 5 estados:
 - El estado vacío: ϕ
 - 5 estados con 1 estado: $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_4\}$
 - 10 estados con 2 estados: $\{q_0q_1\}, \{q_0q_2\}, \{q_0q_3\}, \dots$
 - 10 estados con 3 estados: $\{q_0q_1q_2\}, \{q_0q_2q_3\}, \{q_0q_3q_4\}, \dots$
 - 5 estados con 4 estados: $\{q_0q_1q_2q_3\}, \{q_0q_1q_2q_4\}, \dots$
 - 1 estado con 5 estados: $\{q_0q_1q_2q_3q_4\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Un código binario para nombrar a los estados de M_1

- El estado con q_1 & q_3 :

Estados de M	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
Nombre del estado en M_1	0	1	0	1	0

- Hay $2^{|Q|}$ estados posibles en M_1 (32 en este caso)
- Cada numeral binario, del 0 al 31, nombra a cada uno de los estados respectivamente

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Las entradas posibles de δ_1 :

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000		
00001		
00010		
00011		
00100		
00101		
00110		
00111		

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
01000		
01001		
01010		
01011		
01100		
01101		
01110		
01111		

ie. 01011 es el estado $0q_10q_3q_4 = q_1q_3q_4$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Las entradas posibles de δ_1 :

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
10000		
10001		
10010		
10011		
10100		
10101		
10110		
10111		

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
11000		
11001		
11010		
11011		
11100		
11101		
11110		
11111		

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La construcción de subconjuntos

- Conjunto de estados de M_1 :
 $Q_1 = 2^Q$
- Estado inicial de M_1 : $q_1 = \{q_0\}$
- $q_1 = \{q_0\} = 10000$
- Estados aceptores de M_1 :
 $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \emptyset\}$
 $A = \{q_4\}$
- Todos los estados cuyo nombre tiene el patrón XXXX1 contienen a q_4 , por lo que son estados aceptores

El NFA M :

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	\emptyset	$\{q_0\}$
q_2	\emptyset	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	\emptyset
$*q_4$	\emptyset	\emptyset

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La construcción de subconjuntos

- La función de transición de M_1 :
Para todo $q \in Q_1$ & $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q, a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r, a)$$

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	\emptyset	$\{q_0\}$
q_2	\emptyset	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	\emptyset
$*q_4$	\emptyset	\emptyset

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000		
$\rightarrow 10000$		

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	\emptyset	$\{q_0\}$
q_2	\emptyset	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	\emptyset
$*q_4$	\emptyset	\emptyset

$00000 = \emptyset, q_0 = 10000, q_1 = 01000$ and $q_4 = 00001$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000		
$\rightarrow 10000$	00001	01100

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	\emptyset	$\{q_0\}$
q_2	\emptyset	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	\emptyset
$*q_4$	\emptyset	\emptyset

$\delta_1(10000, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_4\}$
 $\delta_1(10000, 1) = \delta(q_0, 1) = \{q_1, q_2\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000		
→10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ

	0	1
→ q_0	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
* q_4	ϕ	ϕ

$\delta_1(00001, 0) = \delta(q_4, 0) = \phi$
 $\delta_1(00001, 1) = \delta(q_1, 1) = \phi$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
→10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ

	0	1
→ q_0	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
* q_4	ϕ	ϕ

$\delta_1(00000, 0) = \phi$
 $\delta_1(00000, 1) = \phi$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
→10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ
01100	ϕ	10010

	0	1
→ q_0	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
* q_4	ϕ	ϕ

$\delta_1(01100, 0) = \delta(q_1, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \phi$
 $\delta_1(01100, 1) = \delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1) = \{q_0\} \cup \{q_3\} = \{q_0, q_3\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
→10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ
01100	ϕ	10010
10010	10001	01100

	0	1
→ q_0	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
* q_4	ϕ	ϕ

$\delta_1(10010, 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_3, 0) = \{q_4\} \cup \{q_0\} = \{q_4, q_0\}$
 $\delta_1(10010, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_3, 1) = \{q_1, q_2\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
→10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ
01100	ϕ	10010
10010	10001	01100
*10001	00001	01100

	0	1
→ q_0	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
* q_4	ϕ	ϕ

$\delta_1(10001, 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_4, 0) = \{q_4\}$
 $\delta_1(10001, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_4, 1) = \{q_1, q_2\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
→10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ
01100	ϕ	10010
10010	10001	01100
*10001	00001	01100

	0	1
→ q_0	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
* q_4	ϕ	ϕ

Obtenemos la cerradura: No hay más transiciones posibles

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El DFA resultante

$q_0q_1q_2q_3q_4$	Nombres FA	0	1
00000	s	ϕ	ϕ
$\rightarrow 10000$	$\rightarrow q_0$	00001	01100
*00001	* p	ϕ	ϕ
01100	r	ϕ	10010
10010	t	10001	01100
*10001	* u	00001	01100

Renombrando los estados

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Renombrando los estados

$q_0q_1q_2q_3q_4$	Nombres FA	0	1
00000	s	$s = \phi$	$s = \phi$
$\rightarrow 10000$	$\rightarrow q_0$	$p = 00001$	$r = 01100$
*00001	* p	$s = \phi$	$s = \phi$
01100	r	$s = \phi$	$t = 10010$
10010	t	$u = 10001$	$r = 01100$
*10001	* u	$p = 00001$	$r = 01100$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Renombrando los estados

$q_0q_1q_2q_3q_4$	Nombres FA	0	1
00000	s	s	s
$\rightarrow 10000$	$\rightarrow q_0$	p	r
*00001	* p	s	s
01100	r	s	t
10010	t	u	r
*10001	* u	p	r

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

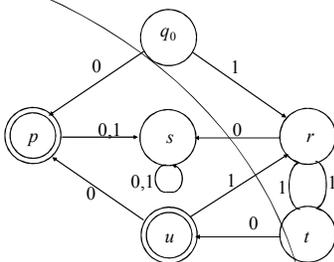
Renombrando los estados

	0	1
s	s	s
$\rightarrow q_0$	p	r
* p	s	s
r	s	t
t	u	r
* u	p	r

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

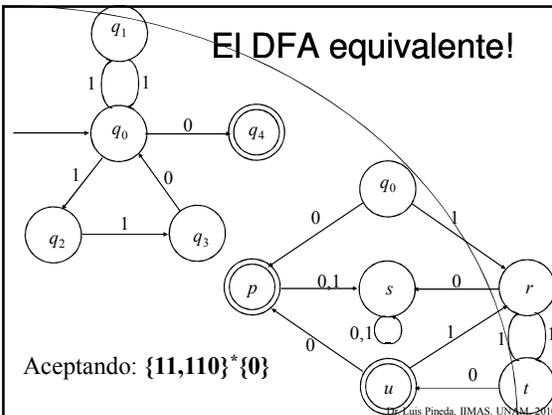
El DFA equivalente!

	0	1
s	s	s
$\rightarrow q_0$	p	r
* p	s	s
r	s	t
t	u	r
* u	p	r



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El DFA equivalente!



Aceptando: $\{11,110\}^* \{0\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Los NFAs son FAs

- M_1 acepta el mismo lenguaje que M ; esto se sigue del hecho de que para cualquier $x \in \Sigma^*$

$$\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$$

- La prueba es por inducción!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Recordando δ^* para NFA

- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ un NFA.
- La función $\delta^*: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ se define como sigue:
 - Para todo $q \in Q, \delta^*(q, \Lambda) = \{q\}$
 - Para todo $q \in Q, y \in \Sigma^* \& a \in \Sigma$:

$$\delta^*(q, ya) = \bigcup_{r \in \delta^*(q, y)} \delta(r, a)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Recordando la const. de subconjuntos

- M_1 se define a partir de M como sigue:
 - El conjunto de estados de M_1 : $Q_1 = 2^Q$,
 - El estado inicial de M_1 : $q_1 = \{q_0\}$
 - La función de transición de M_1 :
Para todo $q \in Q_1 \& a \in \Sigma$

$$\delta_1(q, a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r, a)$$

- El conjunto de estados aceptores de M_1 :
 $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \emptyset\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

$$\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$$

- El caso base: Si $x = \Lambda$

$$\delta_1^*(q_1, x) = \delta_1^*(q_1, \Lambda)$$

$$= q_1 \quad (\text{por def. de } \delta_1^*)$$

$$= \{q_0\} \quad (\text{por def. de } q_1)$$

$$= \delta^*(q_0, \Lambda) \quad (\text{by def. of } \delta^*)$$

$$= \delta^*(q_0, x)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- La hipótesis inductiva:
 $\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$
- Queremos probar que para toda $a \in \Sigma$,
 $\delta_1^*(q_1, xa) = \delta^*(q_0, xa)$
- $\delta_1^*(q_1, xa) = \delta_1(\delta_1^*(q_1, x), a)$ (por def. de δ_1^*)
 $= \delta_1(\delta^*(q_0, x), a)$ (por la hipótesis inductiva)
 $= \bigcup_{r \in \delta^*(q_0, x)} \delta(r, a)$ (por def. de δ_1 : Const. de SubConj.)
 $= \delta^*(q_0, xa)$ (por def. de δ^*)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

M & M_1 reconocen el mismo lenguaje

- Una cadena x se acepta por M_1 si $\delta_1^*(q_1, x) \in A_1$
- lo cual es cierto si y solo si $\delta^*(q_0, x) \in A$
- este es el caso si y sólo si (por definición de A) $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$
- Por lo tanto, x se acepta por M_1 si y solo si x se acepta por M

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

