

Tema 1

Nociones Preliminares y Lenguajes

Dr. Luis A. Pineda
ISBN: 970-32-2972-7

Conceptos centrales

- Alfabetos
- Cadenas
- Lenguajes
- Representación
- Interpretación
- Problemas
- Funciones, algoritmos y fórmulas

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Alfabetos

- Conjunto finito (no vacío) de símbolos: Σ
 - $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega\}$
 - $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$
 - $\Sigma = \{1\}$
 - $\Sigma =$ El conjunto de caracteres ASCII

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadenas

- Una cadena (o palabra) sobre un alfabeto Σ
 - Una secuencia finita de símbolos de Σ
- Longitud de una cadena
 - El número (posiciones) de símbolos en la cadena:
 - $w = "111"$ tiene un símbolo pero tres posiciones
 - La longitud de una cadena w es $|w|$
 - $|w| = 3$
- La cadena *nula*: Λ (lambda)
 - Λ se puede seleccionar en cualquier alfabeto
 - $|\Lambda| = 0$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadenas

- Notación:
 - Minúsculas al principio del alfabeto denotan símbolos: $a, b, c, \dots$
 - Minúsculas al final del alfabeto denotan cadenas: $w, x, y, z, \dots$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadenas

- Potencias de un alfabeto
 - Si Σ es un alfabeto Σ^k es el conjunto de cadenas de longitud k , tales que todos los símbolos están en Σ
 - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
 - Si $\Sigma = \{0, 1\}$ entonces
 - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
 - $\Sigma^1 = \{0, 1\}$
 - $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$, etc.
 - $\Sigma \neq \Sigma^1$ (Σ es el alfabeto and Σ^1 es el conjunto de cadenas de longitud 1)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadenas

- Para cualquier alfabeto Σ el conjunto de todas las cadenas sobre Σ se denota Σ^*
 - $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$
 - $\Sigma^* = \{0, 1\}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$
- Y sin Σ^0 :
 - $\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$
 - $\Sigma^+ = \{0, 1\}^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Σ^* es denumerable

- Un conjunto es *denumerable*, *enumerable infinito* o *contable* si puede ser ordenado en una sola lista (probablemente infinita):
 - 1, 2, 3, 4... es una lista infinita
 - 1, 3, 5, ..., 2, 4, 6... no lo es! ($\infty + 1$?)
 - Es necesario poder decir qué número le corresponde a cada elemento de la lista: quién le precede y quién le sigue
 - Un conjunto A es denumerable si existe una función con dominio en los números naturales N tal que a cada miembro de A se asocia un número n en N

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Σ^* es denumerable

N	Σ^*
1	Λ
2	0
3	1
4	00
5	01
6	10
7	11
8	000

N	Σ^*
9	001
10	010
11	011
12	100
13	101
14	110
15	111
16	...

$$\Sigma^* = \{0, 1\}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Σ^* es denumerable

- $\Sigma = \{a, \dots, z\}$ (26 letras)
 - Σ^0 tiene 1 cadena de longitud 0 (i.e. Λ)
 - Σ^1 tiene 26 cadenas de longitud 1 (i.e. $a, \dots, z$)
 - Σ^2 tiene 26^2 cadenas de longitud 2 (en orden alfabético)
 - Σ^3 tiene 26^3 cadenas de longitud 3 (en orden alfabético)
 - ...
- Existe una función tal que cada argumento n tiene como valor la cadena correspondiente en Σ^*

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadenas

- Concatenación de cadenas:
 - Si x y y son cadenas xy denota la concatenación de x con y
 - Más específicamente: Si $x = x_1 x_2 \dots x_i$ & $y = y_1 y_2 \dots y_j$ entonces $xy = x_1 x_2 \dots x_i y_1 y_2 \dots y_j$
 - e.g: $x = 01101$ y $y = 110$ entonces $xy = 01101110$
 - $|xy| = i + j$
 - Identidad para la concatenación: $\Lambda x = x\Lambda = x$
 - La concatenación es asociativa: $(xy)z = x(yz)$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadenas

- Concatenación de conjuntos de cadenas
 - Si $A, B \subseteq \Sigma^*$ la concatenación de A y B es

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ \& } y \in B\}$$
- La concatenación no es conmutativa
 - $A = \{a, b\}$ y $B = \{c, d\}$
 - $AB = \{ac, ad, bc, bd\}$
 - $BA = \{ca, cb, da, db\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Concatenación de cadenas

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ \& } y \in B\}$$

d	ad	bd
c	ac	bc
$\begin{array}{c} B \\ \hline A \end{array}$	a	b

Diferente de $BA = \{ca, cb, da, db\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadenas

• Sin embargo:

$$- \Sigma^{n+1} = \Sigma \Sigma^n = \Sigma^n \Sigma \quad (\Sigma = \Sigma^1)$$

- If $\Sigma = \{0, 1\}$ then

- $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
- $\Sigma^1 = \{\Lambda\} \{0, 1\} = \{0, 1\} \{\Lambda\} = \{0, 1\}$
- $\Sigma^2 = \{0, 1\} \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}$
- $\Sigma^3 = \{0, 1\} \{00, 01, 10, 11\} = \{00, 01, 10, 11\} \{0, 1\}$
 $= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- ...

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Lenguajes

- Un *lenguaje* es un conjunto de cadenas compuestas con símbolos de un alfabeto
- Lenguajes naturales (Español, Inglés, etc.)
 - Nivel sintáctico: oraciones compuestas de palabras
 - Nivel léxico: palabras compuestas de símbolos del alfabeto
- Lenguajes formales
 - Nivel sintáctico: expresiones bien formadas compuestas de cadenas (tokens)
 - Nivel léxico: tokens compuestos por símbolos del alfabeto (e.g. ASCII)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Definiciones de Lenguajes

- Un lenguaje sobre Σ es un subconjunto de Σ^*
- L es un lenguaje sobre Σ si $L \subseteq \Sigma^*$
- L no necesita incluir todos los símbolos de Σ , por lo mismo, si L es un lenguaje sobre Σ , también lo es sobre un super conjunto de Σ

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Ejemplos de Lenguajes

- El lenguaje de todas las cadenas formadas por n 0's seguidas de n 1's, para algún $n \geq 0$:
 $\{\Lambda, 01, 0011, 000111, \dots\}$
- El conjunto de cadenas de 0's y 1's con el mismo número de ambos símbolos:
 $\{\Lambda, 01, 10, 0011, 0101, 1001, \dots\}$
- El conjunto de cadenas representando los números primos en notation binaria:
 $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Ejemplos de Lenguajes

- Σ^* es un lenguaje sobre cualquier alfabeto
- Φ , el lenguaje vacío, es un lenguaje sobre cualquier alfabeto
- $\{\Lambda\}$, el lenguaje consistente de la cadena vacía
- En particular, notar que $\Phi \neq \{\Lambda\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Especificación de lenguajes

- Expresado con notación informal de conjuntos:
 - $\{w \mid \text{una propiedad de } w\}$
 - Ejemplo: $\{w \mid w \text{ consiste de una secuencia de } n \text{ 0's seguida de una secuencia de } n \text{ 1's}\}$
- Expresando w con parámetros
 - $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ donde n es el parámetro
 - $\{0^i 1^j \mid 0 \leq i \leq j\}$ donde i y j son los parámetros
- Combinando las operaciones de conjuntos con la concatenación
 - $\{ab, bab\}^* \cup \{b\} \{bb\}^*$
- E incluso:
 - $\{byb \mid y \in \{a, b\}^*\}$
- Es conveniente tener una manera simple y directa para definir lenguajes!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Representación

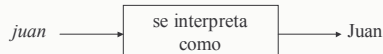
- Las cadenas de un lenguaje *representan* objetos del mundo:
 - Juan, Pedro y Luis se representan por $\{\text{juan}, \text{pedro}, \text{luis}\}$
 - 2, 3, 5, 7, 11 se representan por $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$
- Una representación puede pensarse como una función del mundo al lenguaje
- Es la función que evalúa quien envía un mensaje!



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Interpretación

- Las cadenas del lenguaje *se interpretan* como objetos en el mundo:
 - $\{\text{juan}, \text{pedro}, \text{luis}\}$ se interpretan como Juan, Pedro y Luis
 - $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$ se interpretan como 2, 3, 5, 7, 11
- Una interpretación se puede pensar como una función del lenguaje al mundo!
- Es la función que evalúa quien recibe el mensaje!



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Problemas

- Un *problema* consiste en decidir si una cadena pertenece a un lenguaje
- Si Σ es un alfabeto, L es un lenguaje sobre Σ , el problema L es:
 - Dada una cadena w en Σ^* , decidir si o no w está en L
- Problemas y lenguajes son realmente lo mismo

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Un Problema:

- El problema de decidir si un número es primo puede expresarse con el lenguaje L_p consistente de todas las cadenas monádicas cuya longitud sea un número primo:
 - $L_p = \{11, 111, 11111, 1111111, 1111111111, \dots\}$
 - $111 \in L_p$
 - $1111 \notin L_p$
- Dada una cadena de 1's hay que decir "sí" o "no" dependiendo de si dicha cadena representa o no a un número primo

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Problemas

- Dos maneras de pensar acerca de los problemas:
 - Como un problema de decisión: Decidir si una cadena está incluida en el conjunto (i.e. el lenguaje)
 - $111 \in \{11, 111, 11111, 1111111, 1111111111, \dots\} ?$
 - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida:
 - $111 \longrightarrow \text{Algoritmo} \longrightarrow \text{si}$
- ¿Qué es más fácil?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmos

- Función: independiente de la representación
- Algoritmo: dependiente de la representación
- Fórmula: expresión de un algoritmo!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El problema de los racionales

¿Cómo podemos decidir si un número es racional?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El problema de los racionales

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los racionales son numerables!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La función que los ordena...

1	2	5	10	...		1/1	2/1	3/1	...	m/1
4	3	6	11	...		1/2	2/2	3/2	...	m/2
9	8	7	12	...	$\xrightarrow{r}$	1/3	2/3	3/3	...	m/3
16	15	14	13	...		...	...	...	...	...
...	...	...	...	...		1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los racionales son numerables!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Forma de r

1	2	5	10	...		1/1	2/1	3/1	...	m/1
4	3	6	11	...		1/2	2/2	3/2	...	m/2
9	8	7	12	...	$\xrightarrow{r}$	1/3	2/3	3/3	...	m/3
16	15	14	13	...		...	...	...	...	...
...	...	...	...	...		1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los enteros: $r(1) = 1$, $r(2) = 2$, $r(5) = 3$, ...

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Forma de r

1	2	5	10	...		1/1	2/1	3/1	...	m/1
4	3	6	11	...		1/2	2/2	3/2	...	m/2
9	8	7	12	...	$\xrightarrow{r}$	1/3	2/3	3/3	...	m/3
16	15	14	13	...		...	...	...	...	...
...	...	...	...	...		1/m	2/m	3/m	...	m/m

Redundante: $r(1) = r(3) = r(7) = r(13) = \dots = 1$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cualquier n está sobre un cuadrado de lado m :

$$sq(6) = 3$$

$$sq(8) = 3$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

$sq(n)$ es el numerador o el denominador de un racional en la imagen de r : $sq(n) = m$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Si n está en columna derecha:

$$r(n) = sq(n)/? = m/?$$

$$\text{Ejemplo: } r(6) = sq(6)/? = 3/?$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Si n está en renglón inferior:

$$r(n) = ?/sq(n) = ?/m$$

$$\text{Ejemplo: } r(8) = ?/sq(8) = ?/3$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo esquina inferior derecha:

Si n está en la columna derecha n es cuando más: $n \leq (sq(n) - 1)^2 + sq(n) = (m - 1)^2 + m$

$$\text{Ejemplo: } 7 \leq (3 - 1)^2 + 3 = 7$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo de $?$ si n está en la columna derecha:

Quitar a n el cuadrado anterior: $n - (sq(n) - 1)^2$

$$\text{Ejemplo: si } n = 6: ? = 6 - (3 - 1)^2 = 2$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo de ? si n está en la renglón inferior:

$$sq(n)^2 - n + 1$$

Ejemplo: si $n = 8$: ? = $9 - 8 + 1 = 2$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Algoritmo y formula para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

$$r(n) = \begin{cases} sq(n) & \text{si } n \leq (sq(n) - 1)^2 + sq(n) \\ \frac{n - (sq(n) - 1)^2}{sq(n)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Problemas

- Dos maneras de pensar acerca de los problemas:
 - Como un problema de decisión:
 $1/2 \in \{1/1, 2/1, 2/2, 1/2, 3/1, 3/2, 3/3, 2/3, 1/3, \dots\} ?$
 - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida:



- Pero en este caso, podemos decidir en base a la estructura de las cadenas!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Problemas

- Pero que tal los primos:
 - Como un problema de decisión:
 $111 \in \{11, 111, 11111, 1111111, 1111111111, \dots\} ?$
 - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida:



- ¿Podemos ordenar los primos?
- ¿Lo podemos saber por la estructura de las cadenas?
- ¿Tenemos que verificar los naturales uno por uno?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Teoría de la complejidad

- Todo algoritmo requiere recursos:
 - Pasos de procesamiento (tiempo)
 - Memoria
- El problema es complejo si lo expresamos tanto:
 - Como problema de decisión
 - Como proceso algorítmico

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7