

## Tema 1

### Nociones Preliminares y Lenguajes

Dr. Luis A. Pineda  
ISBN: 970-32-2972-7

## Conceptos centrales

- Alfabetos
- Cadenas
- Lenguajes
- Representación
- Interpretación
- Problemas
- Funciones, algoritmos y fórmulas

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Alfabetos

- Conjunto finito (no vacío) de símbolos:  $\Sigma$ 
  - $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$
  - $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega\}$
  - $\Sigma = \{0, 1\}$
  - $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$
  - $\Sigma = \{1\}$
  - $\Sigma =$  El conjunto de caracteres ASCII

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Cadenas

- Una cadena (o palabra) sobre un alfabeto  $\Sigma$ 
  - Una secuencia finita de símbolos de  $\Sigma$
- Longitud de una cadena
  - El número (posiciones) de símbolos en la cadena:
    - $w = "111"$  tiene un símbolo pero tres posiciones
  - La longitud de una cadena  $w$  es  $|w|$ 
    - $|w| = 3$
- La cadena *nula*:  $\Lambda$  (lambda)
  - $\Lambda$  se puede seleccionar en cualquier alfabeto
    - $|\Lambda| = 0$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Cadenas

- Notación:
  - Minúsculas al principio del alfabeto denotan símbolos:  $a, b, c, \dots$
  - Minúsculas al final del alfabeto denotan cadenas:  $w, x, y, z, \dots$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Cadenas

- Potencias de un alfabeto
  - Si  $\Sigma$  es un alfabeto  $\Sigma^k$  es el conjunto de cadenas de longitud  $k$ , tales que todos los símbolos están en  $\Sigma$
  - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
  - Si  $\Sigma = \{0, 1\}$  entonces
    - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
    - $\Sigma^1 = \{0, 1\}$
    - $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$ , etc.
  - $\Sigma \neq \Sigma^1$  ( $\Sigma$  es el alfabeto and  $\Sigma^1$  es el conjunto de cadenas de longitud 1)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Cadenas

- Para cualquier alfabeto  $\Sigma$  el conjunto de todas las cadenas sobre  $\Sigma$  se denota  $\Sigma^*$ 
  - $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$ 
    - $\Sigma^* = \{\emptyset, 1\}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$
- Y sin  $\Sigma^0$ :
  - $\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$ 
    - $\Sigma^+ = \{0, 1\}^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## $\Sigma^*$ es denumerable

- Un conjunto es *denumerable*, *enumerable infinito* o *countable* si puede ser ordenado en una sola lista (probablemente infinita):
  - $1, 2, 3, 4, \dots$  es una lista infinita
  - $1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots$  no lo es! ( $\infty + 1$ ?)
  - Es necesario poder decir qué número le corresponde a cada elemento de la lista: quién le precede y quién le sigue
  - Un conjunto  $A$  es denumerable si existe una función con dominio en los números naturales  $N$  tal que a cada miembro de  $A$  se asocia un número  $n$  en  $N$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## $\Sigma^*$ es denumerable

$N$	$\Sigma^*$
1	$\Lambda$
2	0
3	1
4	00
5	01
6	10
7	11
8	000

$N$	$\Sigma^*$
9	001
10	010
11	011
12	100
13	101
14	110
15	111
16	...

$$\Sigma^* = \{0, 1\}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## $\Sigma^*$ es denumerable

- $\Sigma = \{a, \dots, z\}$  (26 letras)
  - $\Sigma^0$  tiene 1 cadena de longitud 0 (i.e.  $\Lambda$ )
  - $\Sigma^1$  tiene 26 cadenas de longitud 1 (i.e.  $a, \dots, z$ )
  - $\Sigma^2$  tiene  $26^2$  cadenas de longitud 2 (en orden alfabético)
  - $\Sigma^3$  tiene  $26^3$  cadenas de longitud 3 (en orden alfabético)
  - ...
- Existe una función tal que cada argumento  $n$  tiene como valor la cadena correspondiente en  $\Sigma^*$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Cadenas

- Concatenación de cadenas:
  - Si  $x$  y  $y$  son cadenas  $xy$  denota la concatenación de  $x$  con  $y$
  - Más específicamente: Si  $x = x_1 x_2 \dots x_i$  &  $y = y_1 y_2 \dots y_j$  entonces  $xy = x_1 x_2 \dots x_i y_1 y_2 \dots y_j$
  - e.g.  $x = 01101$  y  $y = 110$  entonces  $xy = 01101110$
  - $|xy| = i + j$
  - Identidad para la concatenación:  $\Lambda x = x\Lambda = x$
  - La concatenación es asociativa:  $(xy)z = x(yz)$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Cadenas

- Concatenación de conjuntos de cadenas
  - Si  $A, B \subseteq \Sigma^*$  la concatenación de  $A$  y  $B$  es
 
$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ \& } y \in B\}$$
- La concatenación no es conmutativa
  - $A = \{a, b\}$  y  $B = \{c, d\}$
  - $AB = \{ac, ad, bc, bd\}$
  - $BA = \{ca, cb, da, db\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Concatenación de cadenas

$$AB = \{xy \mid x \in A \ \& \ y \in B\}$$

d	ad	bd
c	ac	bc
$B \diagdown$ $A \diagup$	a	b

Diferente de  $BA = \{ca, cb, da, db\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Cadenas

### • Sin embargo:

–  $\Sigma^{n+1} = \Sigma \Sigma^n = \Sigma^n \Sigma \quad (\Sigma = \Sigma^1)$

– If  $\Sigma = \{0, 1\}$  then

- $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
- $\Sigma^1 = \{\Lambda\} \{0, 1\} = \{0, 1\} \{\Lambda\} = \{0, 1\}$
- $\Sigma^2 = \{0, 1\} \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}$
- $\Sigma^3 = \{0, 1\} \{00, 01, 10, 11\} = \{00, 01, 10, 11\} \{0, 1\}$   
=  $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- ...

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Lenguajes

- Un *lenguaje* es un conjunto de cadenas compuestas con símbolos de un alfabeto
- Lenguajes naturales (Español, Inglés, etc.)
  - Nivel sintáctico: oraciones compuestas de palabras
  - Nivel léxico: palabras compuestas de símbolos del alfabeto
- Lenguajes formales
  - Nivel sintáctico: expresiones bien formadas compuestas de cadenas (tokens)
  - Nivel léxico: tokens compuestos por símbolos del alfabeto (e.g. ASCII)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Definiciones de Lenguajes

- Un lenguaje sobre  $\Sigma$  es un subconjunto de  $\Sigma^*$
- $L$  es un lenguaje sobre  $\Sigma$  si  $L \subseteq \Sigma^*$
- $L$  no necesita incluir todos los símbolos de  $\Sigma$ , por lo mismo, si  $L$  es un lenguaje sobre  $\Sigma$ , también lo es sobre un super conjunto de  $\Sigma$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Ejemplos de Lenguajes

- El lenguaje de todas las cadenas formadas por  $n$  0's seguidas de  $n$  1's, para algún  $n \geq 0$ :  
 $\{\Lambda, 01, 0011, 000111, \dots\}$
- El conjunto de cadenas de 0's y 1's con el mismo número de ambos símbolos:  
 $\{\Lambda, 01, 10, 0011, 0101, 1001, \dots\}$
- El conjunto de cadenas representando los números primos en notación binaria:  
 $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Ejemplos de Lenguajes

- $\Sigma^*$  es un lenguaje sobre cualquier alfabeto
- $\Phi$ , el lenguaje vacío, es un lenguaje sobre cualquier alfabeto
- $\{\Lambda\}$ , el lenguaje consistente de la cadena vacía
- En particular, notar que  $\Phi \neq \{\Lambda\}$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Especificación de lenguajes

- Expresado con notación informal de conjuntos:
  - $\{w \mid \text{una propiedad de } w\}$
  - Ejemplo:  $\{w \mid w \text{ consiste de una secuencia de } n \text{ 0's seguida de una secuencia de } n \text{ 1's}\}$
- Expresando  $w$  con parámetros
  - $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$  donde  $n$  es el parámetro
  - $\{0^i 1^j \mid 0 \leq i \leq j\}$  donde  $i$  y  $j$  son los parámetros
- Combinando las operaciones de conjuntos con la concatenación
  - $\{ab, bab\}^* \cup \{b\} \{bb\}^*$
- E incluso:
  - $\{byb \mid y \in \{a, b\}^*\}$
- Es conveniente tener una manera simple y directa para definir lenguajes!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Representación

- Las cadenas de un lenguaje *representan* objetos del mundo:
  - Juan, Pedro y Luis se representan por  $\{\text{juan, pedro, luis}\}$
  - 2, 3, 5, 7, 11 se representan por  $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$
- Una representación puede pensarse como una función del mundo al lenguaje
- Es la función que evalúa quien envía un mensaje!



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Interpretación

- Las cadenas del lenguaje *se interpretan* como objetos en el mundo:
  - $\{\text{juan, pedro, luis}\}$  se interpretan como Juan, Pedro y Luis
  - $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$  se interpretan como 2, 3, 5, 7, 11
- Una interpretación se puede pensar como una función del lenguaje al mundo!
- Es la función que evalúa quien recibe el mensaje!



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Problemas

- Un *problema* consiste en decidir si una cadena pertenece a un lenguaje
- Si  $\Sigma$  es un alfabeto,  $L$  es un lenguaje sobre  $\Sigma$ , el problema  $L$  es:
  - Dada una cadena  $w$  en  $\Sigma^*$ , decidir si o no  $w$  está en  $L$
- Problemas y lenguajes son realmente lo mismo

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Un Problema:

- El problema de decidir si un número es primo puede expresarse con el lenguaje  $L_p$  consistente de todas las cadenas monádicas cuya longitud sea un número primo:
  - $L_p = \{11, 111, 11111, 1111111, 1111111111, \dots\}$
  - $111 \in L_p$
  - $1111 \notin L_p$
- Dada una cadena de 1's hay que decir "sí" o "no" dependiendo de si dicha cadena representa o no a un número primo

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Problemas

- Dos maneras de pensar acerca de los problemas:
  - Como un problema de decisión: Decidir si una cadena está incluida en el conjunto (i.e. el lenguaje)
    - $111 \in \{11, 111, 11111, 1111111, 1111111111, \dots\} ?$
  - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida:
    - $111 \longrightarrow \text{Algoritmo} \longrightarrow \text{si}$
- ¿Qué es más fácil?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Algoritmos

- Función: independiente de la representación
- Algoritmo: dependiente de la representación
- Fórmula: expresión de un algoritmo!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## El problema de los racionales

¿Cómo podemos decidir si un número es racional?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## El problema de los racionales

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los racionales son numerables!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## La función que los ordena...

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los racionales son numerables!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Forma de $r$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los enteros:  $r(1) = 1, r(2) = 2, r(5) = 3, \dots$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Forma de $r$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Redundante:  $r(1) = r(3) = r(7) = r(13) = \dots = 1$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

### Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cualquier  $n$  está sobre un cuadrado de lado  $m$ :

$$sq(6) = 3$$

$$sq(8) = 3$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

### Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

$sq(n)$  es el numerador o el denominador de un racional en la imagen de  $r$ :  $sq(n) = m$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

### Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Si  $n$  está en columna derecha:

$$r(n) = sq(n)/? = m/?$$

Ejemplo:  $r(6) = sq(6)/? = 3/?$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

### Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Si  $n$  está en renglón inferior:

$$r(n) = ?/sq(n) = ?/m$$

Ejemplo:  $r(8) = ?/sq(8) = ?/3$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

### Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo esquina inferior derecha:

Si  $n$  está en la columna derecha  $n$  es cuando más:  $n \leq (sq(n) - 1)^2 + sq(n) = (m - 1)^2 + m$

Ejemplo:  $7 \leq (3 - 1)^2 + 3 = 7$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

### Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo de  $?$  si  $n$  está en la columna derecha:

Quitar a  $n$  el cuadrado anterior:  $n - (sq(n) - 1)^2$

Ejemplo: si  $n = 6$ :  $? = 6 - (3 - 1)^2 = 2$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo de ? si  $n$  está en la renglón inferior:

$$sq(n)^2 - n + 1$$

Ejemplo: si  $n = 8$ : ? =  $9 - 8 + 1 = 2$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Algoritmo y formula para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

 $\xrightarrow{r}$ 

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...	...	...	...	...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

$$r(n) = \begin{cases} sq(n) & \text{si } n \leq (sq(n) - 1)^2 + sq(n) \\ n - (sq(n) - 1)^2 & \text{en otro caso} \\ \frac{sq(n)^2 - n + 1}{sq(n)} & \end{cases}$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Problemas

- Dos maneras de pensar acerca de los problemas:
  - Como un problema de decisión:
 
$$1/2 \in \{1/1, 2/1, 2/2, 1/2, 3/1, 3/2, 3/3, 2/3, 1/3, \dots\} ?$$
  - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida:



- Pero en este caso, podemos decidir en base a la estructura de las cadenas!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Problemas

- Pero que tal los primos:
  - Como un problema de decisión:
 
$$111 \in \{11, 111, 11111, 1111111, 1111111111, \dots\} ?$$
  - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida:



- ¿Podemos ordenar los primos?
- ¿Lo podemos saber por la estructura de las cadenas?
- ¿Tenemos que verificar los naturales uno por uno?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

## Teoría de la complejidad

- Todo algoritmo requiere recursos:
  - Pasos de procesamiento (tiempo)
  - Memoria
- El problema es complejo si lo expresamos tanto:
  - Como problema de decisión
  - Como proceso algorítmico

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7