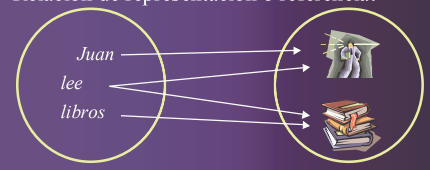
Tema 3

Expresiones y Lenguajes Regulares

Dr. Luis A. Pineda
ISBN: 970-32-2972-7

Sintaxis y Semántica

- En us uso normal, las expresiones lingüística hacen referencia a objetos individuales, así como a sus propiedades y relaciones
- Los símbolos lingüísticos son objetos *sintácticos*
- Relación de representación o referencia:

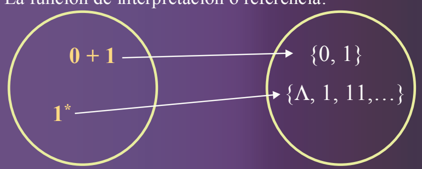


El Languaje refiere al Mundo

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Sintaxis y Semántica

- Si el lenguaje es el objeto de estudio, necesitamos un lenguaje para hablar del lenguaje
- Los conjuntos de cadenas (i.e los lenguajes) se convierten en objetos *semánticos*
- La función de interpretación o referencia:



El Languaje refiere al Mundo

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El lenguaje de las Expresiones Regulares

- Sintaxis
  - Constantes básicas (para un Σ dado)
    - Φ es una expresión regular (*ER*)
    - Λ es una *ER*
    - Si $\boldsymbol{a} \in \Sigma$ entonces $\boldsymbol{a}$ es una *ER*
    - Una variable, una italica mayúscula (e.g. *L*), es una *RE*
  - Reglas de composición:
    - Si *E* & *F* son *ER* entonces $E + F$ es una *ER* (unión)
    - Si *E* & *F* son *ER* entonces *EF* es una *ER* (concatenación)
    - Si *E* es una *ER* entonces E^* es una *ER* (cerradura)
    - Si *E* es una *ER* entonces (E) es una *ER* (introducción de paréntesis)
  - Sólo las expresiones construidas por un número FINITO de aplicaciones de estas reglas son *ER*

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Una formulación alternativa

- Sintaxis
  - Constantes básicas (para un Σ dado)
    - Φ es una expresión regular (*ER*)
    - Λ es una *ER*
    - Si $\boldsymbol{a} \in \Sigma$ entinces $\boldsymbol{a}$ es una *ER*
    - Una variable, una italica mayúscula (e.g. *L*), is a *RE*
  - Reglas de composición (Los paréntesis son obligarorios):
    - Si *E* & *F* son *ER* entonces $(E + F)$ es una *ER* (unión)
    - Si *E* & *F* son *ER* entonces (EF) es una *ER* (concatenación)
    - Si *E* es una *ER* entonces (E^*) es una *ER* (cerradura)
  - Sólo las expresiones construidas por un número FINITO de aplicaciones de estas reglas son *ER*

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

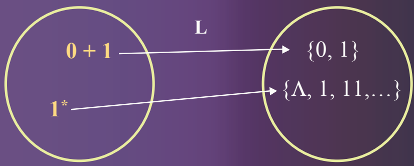
El lenguaje de las Expresiones Regulares

- Semántica:
  - Sea *RE* el conjunto de todas las espresiones regulares sobre Σ, *R* el conjunto de lenguajes regulares y **L** una función de interpretación de *RE* a *R*
  - Interpretación de constantes básicas:
    - $\mathbf{L}(\Phi)$ es Φ (i.e. el lenguaje vacío)
    - $\mathbf{L}(\Lambda)$ es $\{\Lambda\}$ (i.e. el lenguaje con la cadena vacía)
    - Si $\boldsymbol{a} \in \Sigma$ entonces $\mathbf{L}(\boldsymbol{a})$ es $\{a\}$ {i.e. el lenguaje con a}
    - $\mathbf{L}(\boldsymbol{L})$ es un lenguaje arbitrario
  - Interpretación de expresiones compuestas:
    - $\mathbf{L}(E+F)$ es la unión de $\mathbf{L}(E)$ & $\mathbf{L}(F)$
    - $\mathbf{L}(EF)$ o $\mathbf{L}(E.F)$ es la concatención de $\mathbf{L}(E)$ & $\mathbf{L}(F)$
    - $\mathbf{L}(E^*)$ es $(\mathbf{L}(E))^*$ (i.e. la cerradura de $\mathrm{L}(E)$)
    - $\mathbf{L}((E))$ es $\mathbf{L}(E)$ (i.e. el mismo lenguaje)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Sintaxis y Semántica

- La función de referencia o interpretación **L**:



- La interpretación de una expresión compuesta es función de:
  - La interpretación de sus partes
  - Su forma de compósición gramatical (i.e. sintáctica)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Ejemplos

ER	Lenguaje
Λ:	{Λ}
0:	{0}
001:	{001}
0 + 1:	{0, 1}
0 + 10:	{0, 10}
(1 + Λ)001:	{1, Λ}{001} = {1001,001}
(110)*(0 + 1):	{110}*{0, 1}
1*10:	{1}*{10}

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Ejemplos

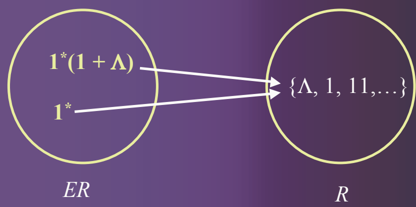
- … **(10 + 111 + 11010)***: {10, 111, 11010}*
- **(0 + 10)*((11)* + 001 + Λ)**: {0, 10}*{{11}* ∪ {001, Λ}}
- **01* + 1:** {0}{1}* ∪ {1} = {1, 0, 01, 011, …, 011…1}
- **(01)* + 1:** {01}* ∪ {1} = {1, Λ, 01, 0101,…, 0101…01}
- **0(1* + 1):** {0}{{1}* ∪ {1}} = {0, 01, 011,…, 011…1}

En particular: **0(1* + 1) = 01***

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Igualdad entre Expresiones Regulares

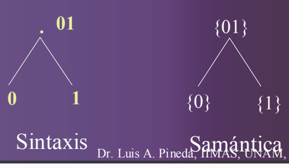
- Dos expresiones regulares son iguales si se refieren al mismo lenguaje:



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Ejemplo: El lenguaje de 0's y 1's alternados

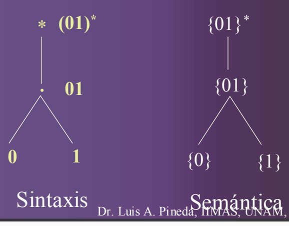
- Primero: El lenguaje {01}: **01**



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Ejemplo: El lenguaje de 0's y 1's alternados

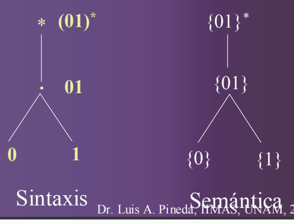
- Segundo: El lenguaje {01}*: **(01)***



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

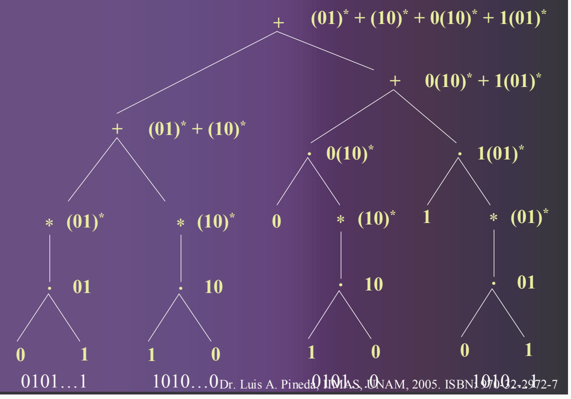
Ejemplo: El lenguaje de 0’s y 1’s alternados

- Pero también necesitamos:
  - {0101…0}
  - {1010…0}
  - {1010…1}



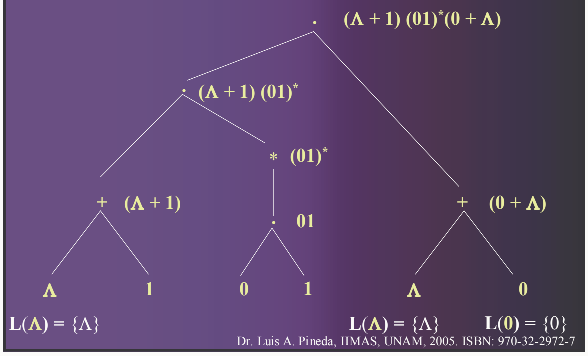
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Ejemplo: El lenguaje de 0’s y 1’s alternados



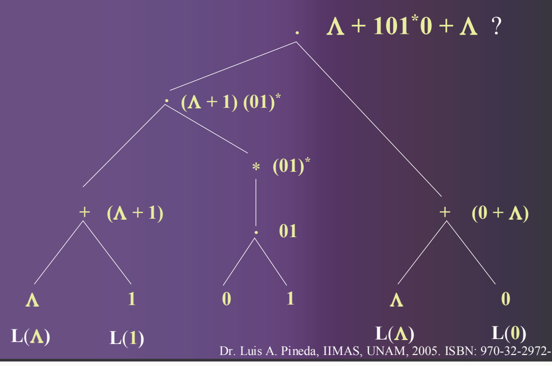
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El poder expresivo de Λ



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

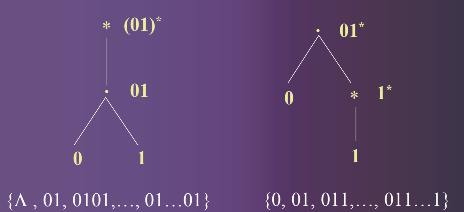
Las *ER* ¿son ambiguas?



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Estructura de las *ER*

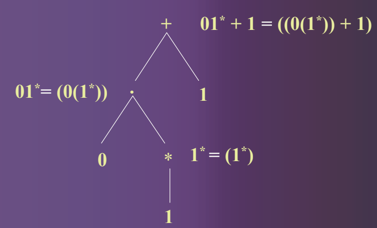
- Los operadores se aplican a la estructura que está abajo:



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Estructura y ambigüedad

- “Ambigüedad” de : $01^* + 1$

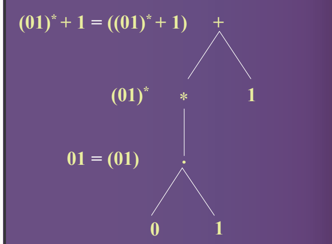


{1, 0, 01, 011, …, 011…1}

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Estructura y ambigüedad

- “Ambigüedad” de : $01^* + 1$

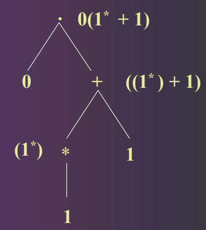


{1, Λ, 01, 0101,…, 0101…01}

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Estructura y ambigüedad

- “Ambigüedad” de : $01^* + 1$

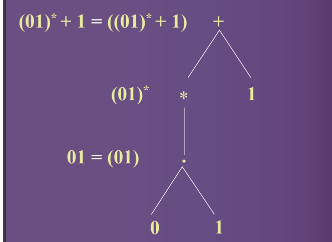


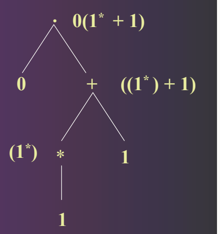
{0, 01, 011,…, 011…1}

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Estructura y ambigüedad

- “Ambigüedad” de: $01^* + 1$





{1, Λ, 01, 0101,…, 0101…01} {0, 01, 011,…, 011…1}

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Precedencia de operadores

- Orden de precedencia:
  - Mayor: Operador de cerradura (*)
    - Se aplica a la secuencia más pequeña por su izquierda
  - Siguiente: Operador de concatenación (punto)
    - Juxtaposición de cadenas
    - Cadenas sin operador intermedio se agrupan juntas
    - Asociativo (convencionalmente se agrupa por la izquierda)
  - Menor: El operador de unión (+)
    - Asociativo (convencionalmente se agrupa por la izquierda)

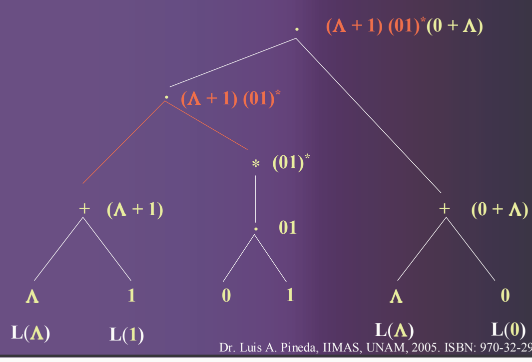
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Agrupando al “.” por la izquierda

$(\Lambda + 1)\,(01)^*(0 + \Lambda)$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Agrupando al “.” por la izquierda



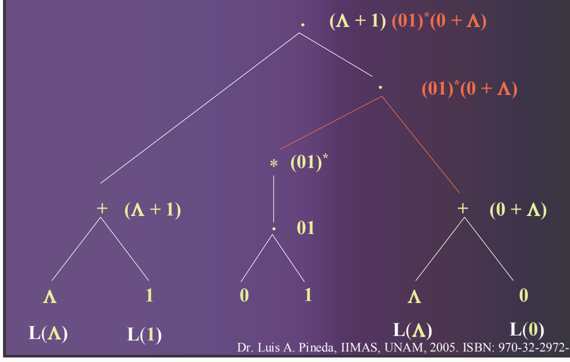
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Agrupando al "." por la derecha

$(\Lambda + 1)\,(01)^*(0 + \Lambda)$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Agrupando al "." por la derecha



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Precedencia, paréntesis y ambigüedad

- Las *ER* son aparentemente ambiguas, pero
  - Los paréntesis y el orden de precedencia eliminan la ambigüedad
- También:
  - *ER* tienen estructura
  - Los árboles muestran la extructura explícitamente!
  - Las expresiones ambiguas tienen varias estructuras posibles
  - Sólo hay una estructura para cada *RE*
- Tomando en cuenta los paréntesis y la precedencia de operadores, no hay ambigüedad posible
- ¡*ER* no son ambiguas!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Igualdad de expresiones regulares

- Util para la simplificación de expresiones
- Como veremos, útil para simplificar Autómatas (con el menor número de estados posibles)
  - $1^*(1 + \Lambda) = 1^*$
  - $1^*1^* = 1^*$
  - $0^* + 1^* = 1^* + 0^*$
  - $(0^*1^*)^* = (0 + 1)^*$
  - $(0 + 1)^*01(0 + 1)^* + 1^*0^* = (0 + 1)^*$
- Existe un método general (un algoritmo) para decidir si dos expresiones denotan al mismo lenguaje

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Simplificando *ER*

- $(r + s + rs + sr)^*$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Simplificando *ER*

- $(r + s + rs + sr)^*$
  - rs puede formarse tomando r & s;
  - sr puede formarse tomando s & r,
  - entonces:

$$(r + s + rs + sr)^* = (r + s)^*$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Simplificando *ER*

- $r(r^*r + r^*) + r^*$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Simplificando *ER*

- $r(r^*r + r^*) + r^*$
  - $r^*r = r^+$
  - $r(r^*r + r^*) + r^* = r(r^+ + r^*) + r^*$

$$= r(r^*) + r^*$$
$$= rr^* + r^*$$
$$= r^+ + r^*$$
$$= r^*$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Interpretando *RE*

- Considere las expresiones regulares:
  - $r = 0^* + 1^*$
  - $s = 01^* + 10^* + 1^*0 + (0^*1)^*$
- Una cadena en r pero no en s
  - 00
- Una cadena en s pero no en r
  - 01
- Una cadena en ambas r & s
  - Hay varias obvias: Λ, 0, 1
- Una cadena en $\{0, 1\}^*$ que no está en r ni en s
  - Cualquier cadena de forma: 1^i0^i para $i \geq 2$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Encontrar una *RE*

- Dar una expresión regular para el lenguaje:
  - $\{ s \in \{a, b\}^* : |s|$ no es divisible entre $2\}$
- Si $|s|$ es divisible entre 2
  - Su longitud es par (i.e. en otro caso es non)
- *ER* para cadenas de longitud par:
  - $(aa + ab + ba + bb)^*$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Encontrar una *RE*

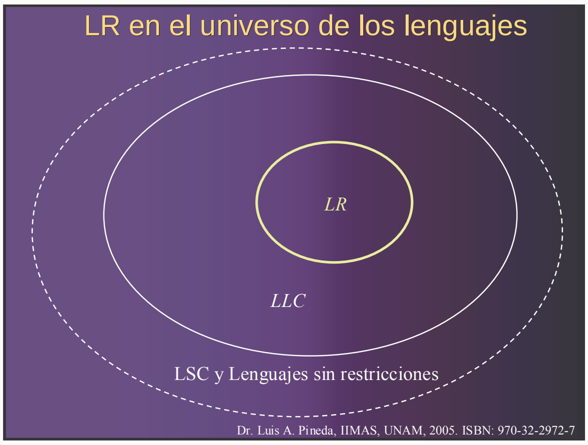
- Aumentando un símbolo, ya sea a o b (i.e. cadenas de longitud non):
  - $(aa + ab + ba + bb)^*(a + b)$
- Alternativamente:
  - $(a + b)(aa + ab + ba + bb)^*$
- Introduciendo abstracción:
  - $(a + b)((a + b)(a + \mathrm{b}))^*$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Conjuntos regulares

- Lenguajes generados a partir de:
  - Φ, Λ y los símbolos en Σ
- Por medio de:
  - Unión
  - Concatenación
  - Cerradura de Kleen (Kleen-star)
- A través de un número *finito* de operaciones
  - Una expresión regular es una cadena finita!
  - Formalmente, no permitimos elípsis (…)
  - Una árbol es también una estructura finita!
- El conjunto denotado es un subconjunto del conjunto potencia de Σ^* (2^{Σ^*}:), el cual no puede contarse!
- Hay muchos, muchos, lenguajes que no son regulares!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7


LR en el universo de los lenguajes
LR
LLC
LSC y Lenguajes sin restricciones
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7