

Tema 12

Autómata Mínimo

Dr. Luis A. Pineda
ISBN: 970-32-2972-7

Propiedad esencial de los LR

- Teorema de Kleene: Un lenguaje es regular si y sólo si existe una *ER* que lo denota y un FA que lo acepta.
- Pero, ¿qué tal si tenemos un lenguaje descrito de manera intuitiva?:
 - $L = \{0^n 1^n \in \Sigma^* \mid n > 0\}$
 - ¿Es este lenguaje regular?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Propiedad esencial de los LR

- Sabemos que si hay n clases de cadenas en L , un FA que reconozca a L debe tener cuando menos n estados:
 - Todos los FA tienen un número finito de estados
 - Si el número de clases de cadenas en L es finito, entonces existe un FA que lo reconoce y una *RE* que lo describe!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

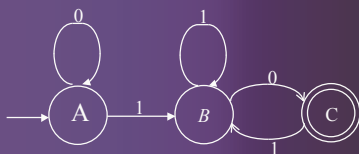
Las clases de cadenas

- Podemos definir el FA a partir de las clases de cadenas!
- FA para el lenguaje de cadenas que terminan en 10:
 - Clase A: La cadena necesita un 10 para pertenecer al lenguaje
 - Clase B: La cadena necesita un 0
 - Clase C: La cadena pertenece al lenguaje!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

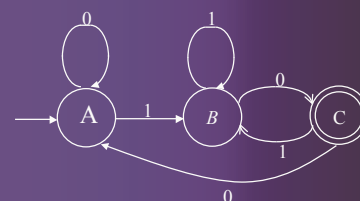
Del conjunto finito de clases al FA...

- FA que acepta las cadenas que terminan en 10:
 - Clase A: La cadena necesita 10
 - Clase B: La cadena necesita un 0
 - Clase C: La cadena pertenece al lenguaje!



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Perdón... el terreno es resbaladizo!



- Afortunadamente hay un algoritmo para generar el FA a partir del conjunto finito de clases del lenguaje!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Las clases de cadenas!

- Estudiamos el lenguaje directamente: No disponemos del FA o de la RE!
 - Clase A: Λ , 0 o termina en 00
 - Clase B: 1, 11 o termina en 01
 - Clase C: La cadena termina con 10 y pertenece al lenguaje

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Las clases de cadenas!

- De modo más general: hay una cadena diferenciante z por cada clase que distingue a todas las cadenas de cada clase con respecto a todas las otras clases:

$$L/x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadenas diferenciantes

- Sea L/x el conjunto de cadenas:
 - $L/x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$
- x & y son distinguibles respecto a L si
 - $L/x \neq L/y$
- Cualquier cadena z tal que $xz \in L$ & $yz \notin L$ o vice versa, diferencia o distingue a x & y con respecto a L
- Si $L/x = L/y$, x & y son indistinguibles (o equivalentes) con respecto a L

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Las clases de cadenas!

- Clase A (necesita 10):
 - Λ
 - 0
 - Σ^*00
- Clase B (necesita 0):
 - 1
 - Σ^*11
 - Σ^*01
- Clase C (está en L):
 - Σ^*10

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Diferenciando las clases de cadenas

- $z = 10$ & $L/x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$
 - $\Lambda 10$
 - 010
 - Σ^*0010
- $z = 0$ & $L/y = \{z \in \Sigma^* \mid yz \in L\}$
 - 10
 - Σ^*110
 - Σ^*010
- $z = \Lambda$ & $L/u = \{z \in \Sigma^* \mid uz \in L\}$
 - $\Sigma^*10\Lambda$
- Tenemos una z por cada clase de cadenas!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Distinguiendo L/u de L/x

- Sea $z = \Lambda$
 - $L/u = \{z \in \Sigma^* \mid uz \in L\}$
 - $\Sigma^*10\Lambda$
 - $L/x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \notin L\}$
 - $\Lambda\Lambda$
 - 0Λ
 - $\Sigma^*00\Lambda$
- $L/u \neq L/x$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Distinguiendo L/u de L/y

- Let $z = \Lambda$
 - $L/u = \{z \in \Sigma^* \mid uz \notin L\}$
 - $\Sigma^*10\Lambda$
 - $L/y = \{z \in \Sigma^* \mid yz \in L\}$
 - 1Λ
 - $\Sigma^*11\Lambda$
 - $\Sigma^*01\Lambda$
- $L/u \neq L/y$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Distinguiendo L/y de L/x

- Sea $z = 0$
 - $L/y = \{z \in \Sigma^* \mid yz \in L\}$
 - 10
 - Σ^*110
 - Σ^*010
 - $L/x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \notin L\}$
 - $\Lambda 0$
 - 00
 - Σ^*000
- $L/y \neq L/x$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La relación de cadenas indistinguibles I_L

- La relación de indistinguibilidad I_L en Σ^* se define como sigue:
 - $x I_L y$ si y sólo si $L/x = L/y$
- I_L es una relación de equivalencia en Σ^*
 - Reflexiva: xRx
 - Transitiva: $xRy \ \& \ yRz \rightarrow xRz$
 - Simétrica: Si $xRy \rightarrow yRx$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La relación de cadenas indistinguibles I_L

- Notación:
 - $[x]$ denota la clase de equivalencia de x
- Dos cadenas son distinguibles con respecto a L si y sólo si están en clases diferentes de I_L

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Propiedades de I_L

- Todas las cadenas en la misma partición de I_L pueden considerarse como la misma para efecto de operaciones de cadenas que involucran a I_L
- I_L es invariante por la derecha con respecto a la concatenación:
 - Para todo $x, y \in \Sigma^*$ & cualquier $a \in \Sigma$,
 - Si $x I_L y$ entonces $xa I_L ya$
 - Si $[x] = [y]$ entonces $[xa] = [ya]$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El algoritmo

- Sea $L \subseteq \Sigma^*$ & Q_L el conjunto de clases equivalentes de I_L sobre Σ^* . Si Q_L es finita (cada miembro de Q_L es un conjunto de cadenas) entonces $M_L = (Q_L, \Sigma, q_0, A_L, \delta)$ es un FA que acepta a L , donde:
 - $q_0 = [\Lambda]$
 - $A_L = \{q \in Q_L \mid q \cap L \neq \Phi\}$
 - $\delta: Q_L \times \Sigma \rightarrow Q_L$ es
 - $\delta([x], a) = [xa]$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El algoritmo

- M_L es el FA con el mínimo número de estados que acepta a L
- Función de transición aumentada para M_L :

$$\delta^*([x], y) = [xy]$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Ahora podemos estar seguros!

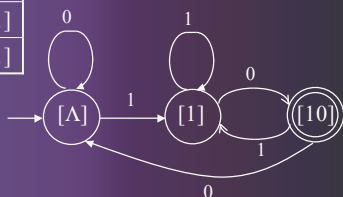
- $M_L = (Q_L, \{0, 1\}, [\Lambda], \{[10]\}, \delta)$ donde
 - $Q_L = \{[\Lambda], [1], [10]\}$
 - $[\Lambda] = \{\Lambda, 0, \Sigma^*00\}$
 - $[1] = \{1, \Sigma^*11, \Sigma^*01\}$
 - $[10] = \{\Sigma^*10\}$
- Definición de δ : $\delta([x], a) = [xa]$
 - $\delta([\Lambda], 0) = [\Lambda 0] = [0] = [\Lambda]$ & $\delta([\Lambda], 1) = [\Lambda 1] = [1]$
 - $\delta([1], 0) = [10]$ & $\delta([1], 1) = [11] = [1]$
 - $\delta([10], 0) = [100] = [\Lambda]$ & $\delta([10], 1) = [101] = [1]$
- Se puede escoger cualquier cadena en la clase: son cadenas equivalentes en relación a L !

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Ahora podemos estar seguros!

- $M_L = (Q_L, \{0, 1\}, [\Lambda], \{[10]\}, \delta)$ donde
 - $Q_L = \{[\Lambda], [1], [10]\}$
 - δ :

Q_L	0	1
$[\Lambda]$	$[\Lambda]$	$[1]$
$[1]$	$[10]$	$[1]$
$[10]$	$[\Lambda]$	$[1]$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Teorema de Myhill & Nerode

- L es un lenguaje regular sí y solo sí el conjunto de clases de cadenas equivalentes es finito
- La **Regularidad** es una propiedad esencial del lenguaje: no es una propiedad de las expresiones regulares (RE) ni del FA que acepta el lenguaje!

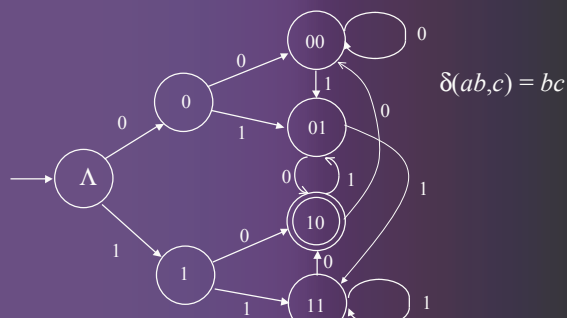
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Pero... ¿No hay de otra?

- ¡Encontrar I_L puede ser muy difícil!
- Sin embargo, si ya tenemos un FA, ¿podemos encontrar el FA mínimo equivalente?
- ¡Mucho más útil en la vida real!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¿Hay un algoritmo para encontrar el FA mínimo?



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Una segunda forma de particionar a las cadenas!

- El lenguaje consistente en el conjunto de cadenas que llegan a un estado dado a partir del estado inicial:

$$L_q = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) = q\}$$

- El conjunto de todas las cadenas es la unión de estos conjuntos para todo $q \in Q$!
- ¡Los estados del FA permiten definir una segunda partición del conjunto de cadenas!

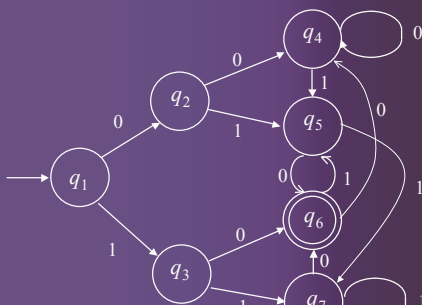
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

$$L_q = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) = q\}$$



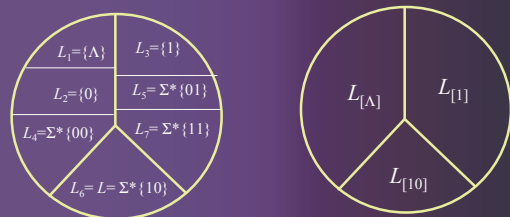
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Los lenguajes que corresponden a cada estado



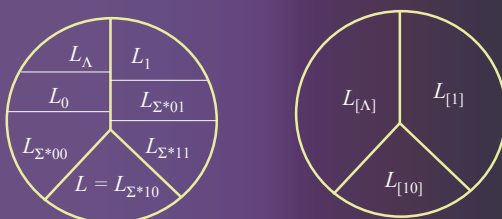
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

$$L_q = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) = q\}$$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

$$L_q = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) = q\}$$



Las clases equivalentes determinadas por los estados del FA corresponden a una partición I_L

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La reducción...

- Sea (p, q) el par de estados en la misma clase de equivalencia
- Los lenguajes L_p & L_q son subconjuntos de la misma clase de equivalencia
- $-p \equiv q$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La reducción...

- Por otro lado, si p & q no pertenecen a la misma partición, los lenguajes correspondientes son subconjuntos de clases de equivalencia diferentes

$$- p \neq q$$

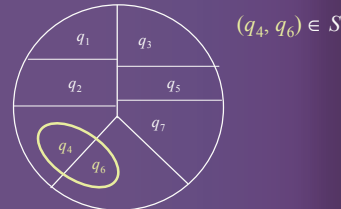
- El FA mínimo se puede encontrar identificando a los pares (p, q) tales que $p \neq q$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La propiedad que necesitamos...

S es el conjunto de pares (p, q) tales que $p \neq q$

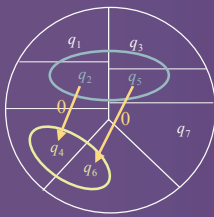
Los estados aceptores y todos los no aceptores están en particiones diferentes, y eso es todo lo que sabemos!



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La propiedad que necesitamos...

S es el conjunto de pares (p, q) tales que $p \neq q$



$$(q_4, q_6) \in S$$

&

(q_2, q_5) es tal que

$$\delta(q_2, 0) = q_4$$

$$\delta(q_5, 0) = q_6$$

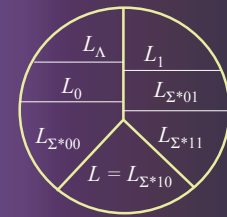
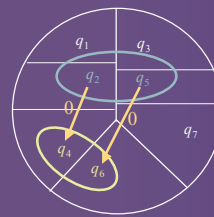
entonces $(q_2, q_5) \in S$.

0 es una cadena diferenciante entre q_2 & q_5

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La propiedad que necesitamos...

- 0 es una cadena diferenciante que lleva cadenas de L_{Σ^*01} a L pero no a cadenas de L_0
- Consecuentemente, q_2 & q_5 pertenecen a particiones diferentes de L_L



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La propiedad que necesitamos...

- Si (p, q) es un par de estados tal que
 - $- p \neq q$ &
 - $- \delta(r, a) = p$ &
 - $- \delta(s, a) = q$

entonces (r, s) es también un par de estados tales que $r \neq s$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La propiedad que necesitamos...

- Si $p \neq q$ entonces hay una z tal que
 - $- \delta^*(p, z) \in A$ o $\delta^*(q, z) \in A$, pero no ambas entonces, sólo uno de
 - $- \delta^*(r, az) = \delta^*(\delta(r, a), z) = \delta^*(p, z)$
 - $- \delta^*(s, az) = \delta^*(\delta(s, a), z) = \delta^*(q, z)$
 está en A !
- Trayectorias de estados no-equivalentes se forman por estados que no son equivalentes!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

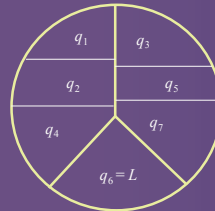
El algoritmo...

- Sea S el conjunto de pares (p, q) tales que $p \neq q$
 - Para todo $p \& q$ tal que sólo uno de estos está en A , incluir (p, q) en S
 - Para todo par $(p, q) \in S$, si (r, s) es un par tal que $\delta(r, a) = p \& \delta(s, a) = q$ entonces $(r, s) \in S$
 - Estos son los únicos pares en S

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

1. Para todo $p \& q$ tal que sólo uno de estos está en A , incluir (p, q) en S
2. Hasta ahora sólo sabemos que los estados aceptores no están en la misma partición de los no aceptores



$$S = \{(q_1, q_6), (q_2, q_6), (q_3, q_6), (q_4, q_6), (q_5, q_6), (q_7, q_6)\}$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

2. Para todo par $(p, q) \in S$, si (r, s) es tal que
 - $\delta(r, a) = p$
 - $\delta(s, a) = q$
 entonces $(r, s) \in S$.
- S es una relación (la relación de estados en particiones diferentes)
- El complemento de S es también una relación: La relación de estado en la misma partición!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

q_7						1	
q_6						0	
q_5						1	
q_4						1	
q_3						1	
q_2						1	
q_1						1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

$$S = \{(q_6, q_1), (q_6, q_2), (q_6, q_3), (q_6, q_4), (q_6, q_5), (q_6, q_7)\}$$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

q_7						1	
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5						1	
q_4						1	
q_3						1	
q_2						1	
q_1						1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

S es simétrica!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

q_7						1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5					0	1	
q_4				0		1	
q_3			0			1	
q_2		0				1	
q_1	0					1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

También sabemos que ningún estado en S se relaciona consigo mismo: S no es reflexiva!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

q_7						1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5					0	1	
q_4				0		1	
q_3			0			1	
q_2		0				1	
q_1	0					1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

Cálculo de los pares (r, s)

Si (r, s) es tal que $\delta(r, a) = p$ & $\delta(s, a) = q$ entonces $(r, s) \in S$.

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

q_7						1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5					0	1	
q_4				0		1	
q_3			0			1	
q_2		0				1	
q_1	0					1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

Q	0	1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_5
q_3	q_6	q_7
q_4	q_4	q_5
q_5	q_6	q_7
q_6	q_4	q_5
q_7	q_6	q_7

Para calcular a (r, s) necesitamos revizar δ en reversa!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S: viendo hacia atrás!

q_7						1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5					0	1	
q_4				0		1	
q_3			0			1	
q_2		0				1	
q_1	0					1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

Q	0	1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_5
q_3	q_6	q_7
q_4	q_4	q_5
q_5	q_6	q_7
q_6	q_4	q_5
q_7	q_6	q_7

Si (r, s) es tal que $\delta(r, a) = q_4$ & $\delta(s, a) = q_6$ entonces $(r, s) \in S$.

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S: viendo hacia atrás!

q_7						1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5		1			0	1	
q_4				0		1	
q_3			0			1	
q_2		0				1	
q_1	0					1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

Q	0	1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_5
q_3	q_6	q_7
q_4	q_4	q_5
q_5	q_6	q_7
q_6	q_4	q_5
q_7	q_6	q_7

(q_2, q_5) es un par tal que:

$\delta(q_2, 0) = q_4$ & $\delta(q_5, 0) = q_6$ entonces $(q_2, q_5) \in S$.

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S: viendo hacia atrás!

q_7						1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5		1			0	1	
q_4				0		1	
q_3			0			1	
q_2		0				1	
q_1	0					1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

Q	0	1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_5
q_3	q_6	q_7
q_4	q_4	q_5
q_5	q_6	q_7
q_6	q_4	q_5
q_7	q_6	q_7

(q_2, q_5) es un par tal que:

$\delta(q_2, 0) = q_4$ & $\delta(q_5, 0) = q_6$ entonces $(q_2, q_5) \in S$.

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S: viendo hacia atrás!

q_7						1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5		1			0	1	
q_4				0		1	
q_3			0			1	
q_2		0			1	1	
q_1	0					1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

S es simétrica: $(q_5, q_2) \in S$.

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S : viendo hacia atrás!

q_7						1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5		1				0	1
q_4					0		1
q_3				0			1
q_2			0				1
q_1	0						1
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

S es simétrica: Sólo necesitamos buscar en una dirección!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S : viendo hacia atrás!

q_7	1	1		1		1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5	1	1		1	0	1	
q_4			1	0		1	
q_3	1	1	0			1	
q_2		0				1	
q_1	0					1	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

Q	0	1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_5
q_3	q_6	q_7
q_4	q_4	q_5
q_5	q_6	q_7
q_6	q_4	q_5
q_7	q_6	q_7

- Los pares que se pueden encontrar buscando hacia atrás!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

q_7	1	1		1		1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5	1	1		1	0	1	
q_4			1	0	1	1	1
q_3	1	1	0	1		1	
q_2		0	1		1	1	1
q_1	0		1		1	1	1
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

S es simétrica!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

q_7	1	1	0	1	0	1	0
q_6	1	1	1	1	1	0	1
q_5	1	1	0	1	0	1	0
q_4	0	0	1	0	1	1	1
q_3	1	1	0	1	0	1	0
q_2	0	0	1	0	1	1	1
q_1	0	0	1	0	1	1	1
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

Los valores de la matriz de estados en clases de equivalencia diferentes

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

La relación Q_L

q_7			1		1		1
q_6					1		
q_5			1		1		1
q_4	1	1		1			
q_3			1		1		1
q_2	1	1		1			
q_1	1	1		1			
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

El complemento: ¡Los pares de estados en la misma partición!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de Q_L

q_7			1		1		1
q_6					1		
q_5			1		1		1
q_4	1	1		1			
q_3			1		1		1
q_2	1	1		1			
q_1	1	1		1			
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

¡La relación es reflexiva!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de Q_L

q_7			1		1		1
q_6						1	
q_5			1		1		1
q_4	1	1		1			
q_3			1		1		1
q_2	1	1		1			
q_1	1	1		1			
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

¡La relación es simétrica!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de Q_L

q_7			1		1		1
q_6						1	
q_5			1		1		1
q_4	1	1		1			
q_3			1		1		1
q_2	1	1		1			
q_1	1	1		1			
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

La relación es transitiva: Los estados q_1, q_2 & q_4 se relacionan entre sí, pero no con ningún otro estado

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de Q_L

q_7			1		1		1
q_6						1	
q_5			1		1		1
q_4	1	1		1			
q_3			1		1		1
q_2	1	1		1			
q_1	1	1		1			
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

La relación es transitiva: Los estados q_3, q_5 & q_7 se relacionan entre sí, pero no con ningún otro estado

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de Q_L

q_7			1		1		1
q_6						1	
q_5			1		1		1
q_4	1	1		1			
q_3			1		1		1
q_2	1	1		1			
q_1	1	1		1			
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

La relación es transitiva: El estado q_6 se relaciona consigo mismo pero no con ningún otro estado!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de Q_L

q_7					1	1	1
q_5					1	1	1
q_3					1	1	1
q_6				1			
q_4	1	1	1				
q_2	1	1	1				
q_1	1	1	1				
	q_1	q_2	q_4	q_6	q_3	q_5	q_7

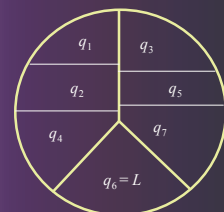
Reordenando los estados

La relación es transitiva: las clases forma grupos donde las propiedades de la relación de equivalencia se pueden apreciar directamente!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

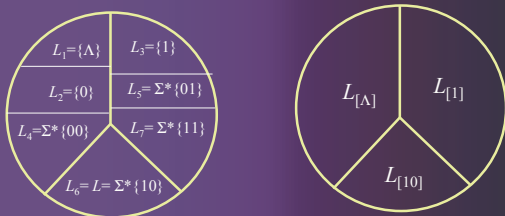
El conjunto de clases de estados equivalentes

q_7					1	1	1
q_5					1	1	1
q_3					1	1	1
q_6				1			
q_4	1	1	1				
q_2	1	1	1				
q_1	1	1	1				
	q_1	q_2	q_4	q_6	q_3	q_5	q_7



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El conjunto mínimo de estados: Q_L



¡La reducción es completa!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cálculo de S

q_7	1	1	1	1	1	0
q_6	1	1	1	1	1	0
q_5	1	1	1	1	0	1
q_4	1	1	1	0	1	1
q_3	1	1	0	1	1	1
q_2	1	0	1	1	1	1
q_1	0	1	1	1	1	1
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6

Marcar los pares de estados que se encuentran buscando hacia atrás un una o más pasadas

Los pares encontrados buscando hacia atrás en la diagonal superior izquierda de la matriz!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El algoritmo

q_7	1	1	1	1	1	1
q_6	1	1	1	1	1	1
q_5	1	1	1	1	1	1
q_4	1	1	1	1	1	1
q_3	1	1	1	1	1	1
q_2	1	1	1	1	1	1
q_1	1	1	1	1	1	1
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6

- Los pares no marcados pertenecen a clases equivalentes
- Incluir los pares relacionando los estados aceptores consigo mismo

$[\Lambda] = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4)\}$
 $[1] = \{(3, 5), (3, 7), (5, 7)\}$
 $[10] = \{(6, 6)\}$ (El estado aceptor)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El algoritmo

- Incluir en S todos los pares que contengan un estado aceptor (sólo uno)
- Seleccionar una región de la matriz de estados:
Si $(x, y) \in S$ & $y < x$ incluir (y, x) en S (S es simétrica)
- Definir a Q como el conjunto de pares de la diagonal superior izquierda de la matriz que no están en S
- Para todo $(x, y) \in Q$, verificar si se puede alcanzar un par en S (con en el mismo símbolo de Σ) en una sola transición
– Si es el caso, eliminar (x, y) de Q e incluirlo en S
- Repetir 4 hasta que no haya más pares a incluir en S
- Incluir en Q todos los pares (x, x) , donde x es un estado aceptor
- Q es la relación de estados equivalente en el FA

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Autómata mínimo

- Para todo FA existe un FA mínimo con n estados
- Muy útil para simplificar FA
- El FA mínimo también provee una “forma normal” para los FA: todo FA se puede reemplazar por su FA mínimo correspondiente
- El FA mínimo permite verificar si dos FA son equivalentes
- Con el FA mínimo y el Teorema de Kleene podemos encontrar la “forma normal” de la ER correspondientes

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El algoritmo

- Sea $L \subseteq \Sigma^*$ & Q_L el conjunto de clases equivalentes de I_L sobre Σ^* . Si Q_L es finita (cada miembro de Q_L es un conjunto de cadenas) entonces $M_L = (Q_L, \Sigma, q_0, A_L, \delta)$ es un FA que acepta a L , donde:
 - $q_0 = [\Lambda]$
 - $A_L = \{q \in Q_L \mid q \cap L \neq \Phi\}$
 - $\delta: Q_L \times \Sigma \rightarrow Q_L$ es
 $\delta([x], a) = [xa]$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Ahora podemos estar seguros!

- $M_L = (Q_L, \{0, 1\}, [\Lambda], \{[10]\}, \delta)$ donde
 - $Q_L = \{[\Lambda], [1], [10]\}$
 - $[\Lambda] = \{\Lambda, 0, \Sigma^*00\} = \{q_1, q_2, q_4\}$
 - $[1] = \{1, \Sigma^*11, \Sigma^*01\} = \{q_3, q_5, q_7\}$
 - $[10] = \{\Sigma^*10\} = \{q_6\}$
- Definición de δ : $\delta([x], a) = [xa]$
 - $\delta([\Lambda], 0) = [\Lambda 0] = [0] = [\Lambda]$ & $\delta([\Lambda], 1) = [\Lambda 1] = [1]$
 - $\delta([1], 0) = [10]$ & $\delta([1], 1) = [11] = [1]$
 - $\delta([10], 0) = [100] = [\Lambda]$ & $\delta([10], 1) = [101] = [1]$
- Se puede escoger cualquier cadena en la clase: son cadenas equivalentes en relación a L !

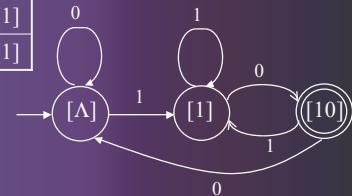
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Ahora podemos estar seguros!

- $M_L = (Q_L, \{0, 1\}, [\Lambda], \{[10]\}, \delta)$ donde
 - $Q_L = \{[\Lambda], [1], [10]\}$

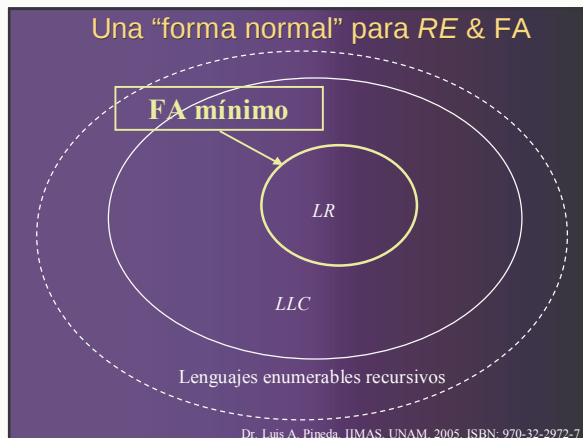
– δ :

Q_L	0	1
$[\Lambda]$	$[\Lambda]$	$[1]$
$[1]$	$[10]$	$[1]$
$[10]$	$[\Lambda]$	$[1]$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Una "forma normal" para RE & FA



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7