Tema 13

Lema de bombeo para *LR*

Dr. Luis A. Pineda

ISBN: 970-32-2972-7

¿Cómo podemos saber is un lenguaje es regular?

- Teorema de Kleene: Si hay una *ER* que describa *L* o un FA que acepte *L*, entonces *L* es regular
- Pero, ¿qué tal si el lenguaje se decribe por otros medios?:
  - $L = \{0^n 1^n \in \Sigma^* \mid n > 0\}$
  - ¿Es regular?
- Estrategia: Encontrar una propiedad que:
  - Todos los *LR* tengan
  - Sea fácil de verificar
  - Si el lenguaje no tiene dicha propiedad, no es regular!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Ya conocemos algunas propiedades…

- El Teorema de Myhill & Nerode: *L* es regular si y solo sí se puede particionar en un conjunto finito de clases de equivalencia
- ¿Qué tan fácil es verificar esta propiedad para un lenguaje dado?
  - ¿El lenguaje de las cadenas terminadas en 10?
  - ¿El lenguaje de todas las palíndromes?
  - ¿Cualquier otro lenguaje?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Otra propiedad más...

- Si $L \subseteq \Sigma^*$ y para algún *n,* hay *n* cadenas en Σ^*, tales que cualquier par de cadenas son distinguibles con respecto a *L*
- Entonces, todo FA que reconozca a *L* debe tener cuando menos *n* estados.

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Otra propiedad: El ciclo!

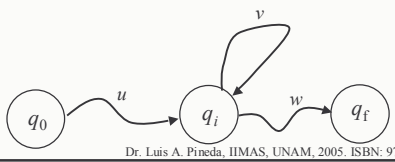
- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ un FA con *n* estados & *x* una cadena de longitud *n* cuando menos
  - $x = a_1 a_2 \ldots a_n y$
- Entonces, toda secuencia de $n + 1$ estados:
  - $q_0 = \delta^*(q_0, \Lambda)$
  - $q_1 = \delta^*(q_0, a_1)$
  - $q_2 = \delta^*(q_0, a_1 a_2)$
  - ….
  - $q_n = \delta^*(q_0, a_1 a_2 \ldots a_n)$

  contiene un ciclo necesariamente!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Cadena con un ciclo!

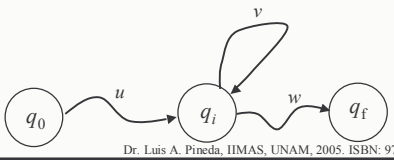
- Si $x \in L$ es suficientemente larga, la forma de *x* is *uvw*



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Un ciclo es un ciclo!

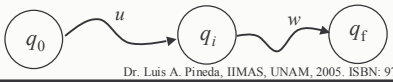
- El ciclo se puede repetir muchas veces: $uv^m w \in L$
- El ciclo corresponde a la cerradura v^m
- El ciclo puede ocurrir 0 o más veces!



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Bombeando el ciclo!

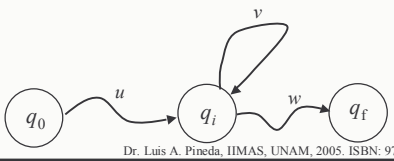
- El ciclo ocurre 0 veces: $uv^0 w \in L$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Bombeando el ciclo!

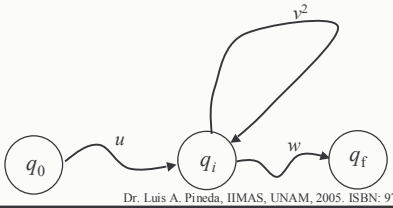
- El ciclo ocurre 1 vez: $uv^1 w = uvw \in L$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Bombeando el ciclo!

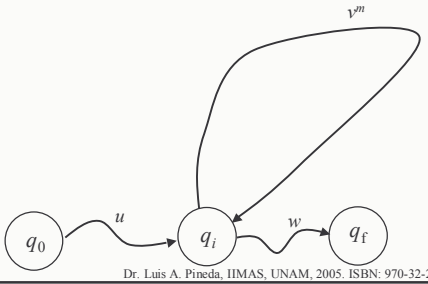
- El ciclo ocurre 2 veces: $uv^2 w \in L$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Bombeando el ciclo!

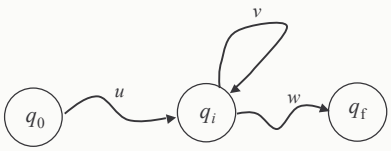
- El ciclo ocurre m veces: $uv^m w \in L$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El ciclo & δ^*

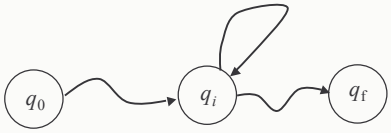
- $\delta^*(q_i, v) = q_i$
- $\delta^*(q_i, v^m) = q_i$ para todo $m \geq 0$ &
- $\delta^*(q_0, uv^m w) = q_f$ para todo $m \geq 0$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Las condiciones para el ciclo

- Supongamos que $q_i = q_{i+p,}$ tal que $0 \le i \le p \le n$ done n es el número de estado:
  - $\delta^*(q_0, a_1a_2\ldots a_i) = q_i$
  - $\delta^*(q_i, a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}) = q_i$
  - $\delta^*(q_i, a_{i+p+1}a_{i+p+2}\ldots a_n y) = q_f \in A$

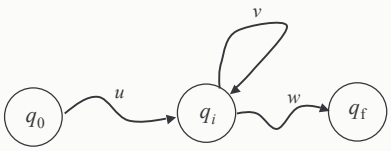


  - ¿Qué condiciones garantizan que ocurra el ciclo?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¡Simplicando la notación!

- $u = a_1a_2\ldots a_i$
- $v = a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}$
- $w = a_{i+p+1}a_{i+p+2}\ldots a_n y$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¿Cuándo se da el loop?

- Sólo sabemos que el FA tiene n estados:

aquí!

$$a_1a_2\ldots a_i a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}a_{i+p+1}a_{i+p+2}\ldots a_n y$$

- Después de leer n símbolos, se necesitan $n + 1$ estados (empezando en q_0) cuando menos
- Para asegurarnos que se da el ciclo: $n \ge i + p$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¿Cuándo se da el loop?

- Sólo sabemos que el FA tiene n estados:

Valor mínimo para n

$$a_1a_2\ldots a_i a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}a_{i+p+1}a_{i+p+2}\ldots a_n y$$

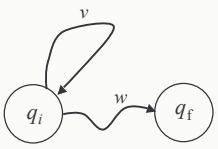
- Para asegurarnos que hay un ciclo: $n \ge i + p$
- p debe ser cuando menos 1 (¡de otro modo no hay ciclo!)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¿Cuándo se da el ciclo?

- u puede ser vacía (pero no lo podemos saber):

$$\Lambda a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}a_{i+p+1}a_{i+p+2}\ldots a_n y$$

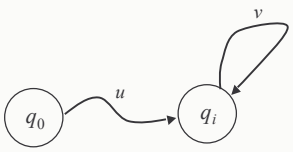


Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¿Cuándo se da el ciclo?

- w puede ser vacía (pero no lo podemos saber):

$$a_1a_2\ldots a_i a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}\Lambda$$

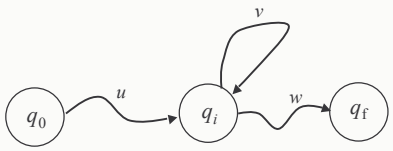


Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¿Cuándo se da el ciclo?

- $|v|$ tiene que ser cuando menos 1 (pero no lo podemos saber):

$$a_1 a_2 \ldots a_i a_{i+1} a_{i+p+1} a_{i+p+2} \ldots a_n y$$



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El lema del bombeo para *LR*

- Sea L un *RL* que se reconoce por un FA con n estados. Para todo $x \in L$ con $|x| \geq n$, x se puede reescribir como $x = uvw$ para las cadenas u, v & w que satisfacen:
  - $|uv| \leq n$: Existe un segmento inicial que incluye el ciclo
  - $|v| > 0$: La longitud del ciclo es cuando menos 1
  - Para todo $m \geq 0$, $uv^m w \in L$: El ciclo se puede bombear!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

¿Y si *L* no es regular?

- Si no sabemos si L es regular:
  - ¡No sabemos si hay un FA que acepte a L!
  - No sabemos cuántos estados el supuesto FA tendría (¡en el caso de que L resultara ser regular!)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El lema del bombeo

- Supongamos que L es un *RL*; entonces existe un n tal que para todo $x \in L$ con $|x| \geq n$, existen las cadenas u, v & w tales que:
  - $x = uvw$
  - $|uv| \leq n$: Existe un segmento inicial que incluye el ciclo
  - $|v| > 0$: La longitud del ciclo es cuando menos 1
  - Para todo $m \geq 0$, $uv^m w \in L$: El ciclo se puede bombear!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Pertenencia a una clase

- Condiciones necesarias y suficientes:
  - Necesarias: todo miembro de la clase tiene la propiedad
  - Suficientes: Tener la propiedad es suficiente para pertencer a la clase
  - ¿Qué tipo de propiedad de un lenguaje es la propiedad de satisfacer el lema del bombeo?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Uso del lema del bombeo

- Teorema Myhill & Nerode: Especifica una condición necesaria y suficiente de todo lenguaje regular
- Lema de bombeo: sólo una condición necesaria pero no suficiente: Hay *Lenguajes libres del contexto* (*LLC*) que satisfacen el lema del bombeo para *LR*!

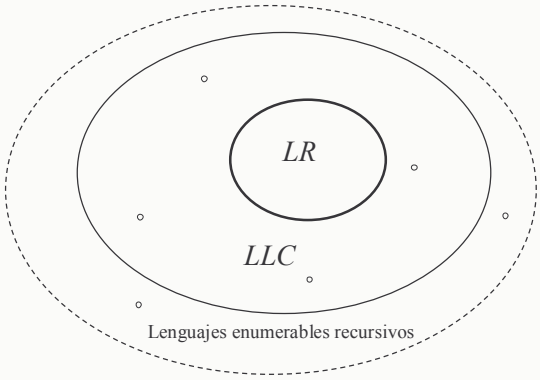
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Uso del lema del bombeo

- El lema del bombeo sólo puede usarse para mostrar que un lenguaje no es regular (por reducción al absurdo), pero no puede usarse para mostrar que un lenguaje regular

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Lenguajes que satisfacen el *LB* para *LR*



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Uso del lema del bombeo

- Si tenemos un lenguaje descrito por otros medios:
  - $L = \{0^n1^n \in \Sigma^* \mid n > 0\}$
  - ¿Es este lenguaje regular?
- Estrategia:
  - Asumir que el lema de bombeo se satisface
  - Si de esta hipótesis se sigue una contradicción el lenguaje no es regular!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Uso del lema del bombeo

- El juego del bombeo (del lema):
  - Jugador 1 selecciona un lenguje L
  - Jugador 2 selecciona un n
  - Jugador 1 selecciona una cadena x en L tal que $|x| \geq n$
  - Jugador 2 divide x en uvw tal que $|uv| \leq n$ & $|v| > 0$ (pero no se la dice al jugador 1)
  - Jugador 1 gana encontrando una $m \geq 0$ tal que $uv^mw \notin L$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

$L = \{0^n1^n \in \Sigma^* \mid n > 0\}$ no es regular

- Probar que $L = \{0^n1^n \in \Sigma^* \mid n > 0\}$ no es regular
- El jugador 1 selecciona al lenguaje L
- El jugador 2 selecciona un n
  - El parámetro n está bien.
- El jugador 1 selecciona una cadena x en L tal que $|x| \geq n$
  - La cadena es $x = 0^n1^n$ está bien: $|x| = 2n \geq n$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

$L = \{0^n1^n \in \Sigma^* \mid n > 0\}$ no es regular

- El jugador 2 divide a x en uvw tal que $|uv| \leq n$ & $|v| > 0$:
  - $u = 0^i$ & $v = 0^j$ donde $i \geq 0$, $j > 0$,
    so $|uv| = |0^i0^j| \leq n$ and $|v| = j > 0$
- El Jugador 1 gana encontrando a $m \geq 0$ tal que $uv^mw \notin L$
  - $m = 0$: $uv^mw = 0^i1^n \notin L$ ya que $i < n$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

L_{pr} = Los números primos

- El jugador 1 selecciona el L
  - $L_{pr} = \{x \in \Sigma^* \mid$ la longitud de x es un número primo en notación monádica$\}$
- El jugador 2 selecciona n
  - El parámetro n tal que $p \geq n + 2$ para cierto p (i.e. siempre habrá un número primo mayor que n)

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

L_{pr} = Los números primos

- El jugador 1 selecciona una cadena x en L tal que $|x| \geq n$
  - La cadena $x = 1^p$ está bien:

    $|x| = p \geq n + 2 \geq n$
- El jugador 2 divide a x en uvw tal que $|uv| \leq n$ & $|v| > 0$:
  - Sea $|v| = k$ para $k > 0$
  - Asumimos que $|uv| \leq n$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

L_{pr} = Los números primos

- El jugador 1 gana encontrando una $m \geq 0$ tal que $uv^m w \notin L$
  - Número primo p: $|uvw| = p$
  - Sea $m = p - k$
  - Si L_{pr} es regular entonces $uv^{p-k}w$ debe estar en L_{pr}
    - $|v| = k$ para $k > 0$
    - $|uw| = p - k$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

L_{pr} = Los números primos

- $|uv^{p-k}w| = |uw| + (p-k)|v|$

  $= (p-k) + (p-k)k$

  $= (p-k)(1+k)$
- $|uv^{p-k}w|$ tiene dos factores, por lo que no puede ser un número primo a menos que uno de los factores sea 1

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

L_{pr} = Los número primos

- El jugador 1 gana encontrando una $m \geq 0$ tal que $uv^m w \notin L$
- Verificamos que los dos factores sean diferentes de 1:
  - $(1 + k) > 1$ dado que $k > 0$
  - $k \leq n$ dado que $k = |v| \leq |uv| \leq n$ (hipótesis original)
  - $(p - k) > 1$ dado que $p \geq n + 2$ & $k \leq n$ por lo que $p \geq k + 2$

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

L_{pr} = Los número primos

- Consecuentemente,
  - $|uv^{p-k}w| = (p-k)(1+k)$ donde
    - $(p-k) > 1$
    - $(1+k) > 1$
  - $uv^{p-k}w \notin L$
- No podemos bombear una cadena de 1's en la representación monádica de un número primo, y obtener otro primo!

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El poder de las *ER* y los FA

- Un *problema* consiste en decidir si una cadena pertenece a un lenguaje
- Los FA permiten resolver problemas de decisión simples (i.e. si x es un número par, pero no si x es un palíndromo).

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

El poder de las *ER* y los FA

- Problema de decisión genérico para un FA: dada una cadena x y un FA M decidir si x se acepta por M:

$(M, x) \longrightarrow$ [Problemas de decisión para *RL*] $\longrightarrow$ Si/No

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Problemas de decisión de *RL*

- Dada una *RE* r & una cadena x, $x \subseteq L(r)$?
- Dado un FA M, es $L(M) = \Phi$?
- Dado un FA M, es $L(M)$ finito?
- Dado M_1 & M_2, es $L(M_1) \cap L(M_2) \neq \Phi$?

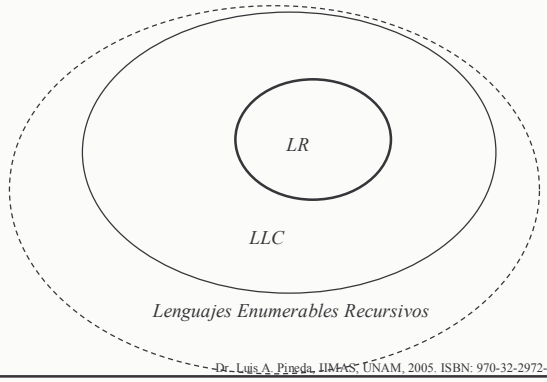
Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Problemas de decisión de *RL*

- Dado M_1 & M_2, es $L(M_1) = L(M_2)$?
- Dado M_1 & M_2, es $L(M_1) \subseteq L(M_2)$?
- Dadas dos *RE*s r_1 and r_2, es $L(r_1) = L(r_2)$?
- Dado un FA M es mínimo?

Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7

Los LR ofrecen un método sólido y eficiente para resolve problemas simples



Dr. Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005. ISBN: 970-32-2972-7