Lógica de Primer Orden

Basado en:
Computability and Logic
Boolos and Jeffrey

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

- Sintaxis
 - Símbolos lógicos
 - Símbolos no-lógicos
- Interpretación
- Satisfacción
- Implicación
- Equivalencia lógica
- Ejemplos

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

- La madre o padre de una persona es su ancestro
- El ancestro de un ancestro de una persona es su ancestro
- Sarah es la madre de Issac, y Issac es el padre de Jacobo
- Entonces, Sarah es ancestro de Jacobo.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Usando las fórmulas

- $\forall x \forall y ((Pxy \vee Qyx) \rightarrow Ryx)$
- $\forall x \forall y (\exists z (Ryz \& Rzx) \rightarrow Ryx)$
- $Pab \& Qbc$
- Rac

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Formalización

- Símbolos de lógicos

$\sim \& \vee \rightarrow \leftrightarrow \forall \exists \equiv () ,$

- Más variables:
 - $x, y, z \dots$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Símbolos no lógicos

- Constantes: $a, b, c \dots$
- Predicados: P, Q, R
 - Tienen aridad
 - Se evalúan a Falso o Verdadero
- Funciones
 - Tienen aridad
 - Se evalúan a constantes

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto enumerable de símbolos no lógicos
- Ejemplo: El lenguaje aritmético, L^*
 - Constante: 0
 - Predicado: $</2$
 - Función: $'/1$ (sucesor), $+/2$, $*/2$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Fórmulas y términos

- Fórmulas: secuencias de símbolos que corresponden a oraciones *bien formadas* en español
 - Abiertas y cerradas
- Términos: secuencias de símbolos que corresponden a frases *bien formadas* en español
 - Abiertas y cerradas

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Fórmulas de un lenguaje

- Las fórmulas dado un lenguaje corresponde a las fórmulas cuyos símbolos no lógicos son parte del lenguaje dado
- ¿Qué hay del lenguaje vacío?
 - Tiene un número infinito de fórmulas: $\forall x x = x$
- Las fórmulas dado un lenguaje son enumerables

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Todo es cuestión de interpretación

- El cuadrado o cubo de un número es un potencia de ese número.
- La potencia de una potencia de un número es una potencia de ese número.
- 64 es el cubo de 4 y 4 es el cuadrado de 2.
- Entonces, 64 es una potencia de 2.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Las mismas fórmulas

- $\forall x \forall y ((Pxy \vee Qyx) \rightarrow Ryx)$
- $\forall x \forall y (\exists z (Ryz \ \& \ Rzx) \rightarrow Ryx)$
- $Pab \ \& \ Qbc$
- Rac
- Mismo lenguaje (L_G):
 - Constantes: a, b, c
 - Predicados: P, Q, R

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Interpretación

- Definir que representan variables, constantes, predicados y funciones
 - Primer caso: variables son personas, a es Sarah, b es Issac y c es Jacobo. P es una relación entre madre a hijo, Q padre a hijo y R ancestro a descendiente.
 - Segundo caso: variables son enteros, a es 64, b es 4 y c es 2. P es el cubo, Q es cuadrado, R potencia.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Interpretación M

- Dominio o universo de discurso $|M|$
 - Todo x
 - Todo x en M
- Denominación
 - Constantes C^M : un objeto en $|M|$
 - Predicados R^M : un conjunto de n -tuplas
 - Funciones F^M : una función de $|M|^n$ a $|M|$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Interpretación G para L_G

- Dominio $|G|$: todas las personas
- a^G Sarah, b^G Issac, c^G Jacobo
- P^G pares donde la primera persona es la madre de la segunda, similarmente Q^G y R^G
 - $\exists z(Pyz \ \& \ Qzx)$ “y es la abuela por padre de x”
 - $\sim \exists x Pxx$ “nadie es su propia madre”
 - $\exists x Qxx$ “alguien es su propio padre”

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Interpretación N^* para L^*

- Dominio $|N^*|$: el conjunto de números naturales
- 0^{N^*} cero, $<^{N^*}$ menor que, $'^{N^*}$ función sucesor, $+^{N^*}$ suma, $*^{N^*}$ multiplicación
 1. $x * y$
 2. $0''$
 3. $\forall x \forall y (x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0))$
 4. $\forall x \exists y (x < y \ \& \ \sim \exists z (x < z \ \& \ z < y))$
 5. $\forall x (x < x' \ \& \ \sim \exists z (x < z \ \& \ z < x))$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Valores de verdad

- Fórmula cerrada + una interpretación resulta en un valor verdadero o falso.
- El valor podrá ser diferente dependiendo de la interpretación
 - Cambiamos R^G de descendiente a ancestro
 - 1^a y 4^a fórmula son falsas
- No es posible encontrar interpretación que haga 1^a , 2^a y 3^a verdaderas pero la 4^a falsa.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Re-interpretación N^* para L^*

- Dominio $|N^*|$: racionales
 - 4 y 5 ambas falsas
- Dominio $|N^*|$: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$
 - 4 verdadera, 5 falsa
- No hay combinación que haga a 4 verdadera y 5 falsa
- Porque 4 es una consecuencia de 5

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Términos bien formadas

- Cualquier constante es un término: a, b, c
- Cualquier variable es un término: x, y, z
- Cualquier función con sus argumentos es un término: $fx, fyx, \dots$
- Ninguna otra cosa es un término.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Fórmulas bien formadas

- Si P es un predicado y $t_1, \dots, t_n$ es una secuencia de n términos, entonces $P t_1, \dots, t_n$ esta bien formada
- Si F es una fórmula bien formada entonces $\sim F$ también lo es.
- Si F y G son fórmulas bien formadas de $\mathcal{Q}$, entonces $(F \ \& \ G)$, $(F \ \vee \ G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \ \leftrightarrow G)$ y $(F = G)$ también lo son.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Fórmulas bien formadas

- Si F , es una fórmula bien formada entonces $\forall x. F$ y $\exists x F$, también lo son
- Sólo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas 1 a 4 en un número finito de pasos son fórmulas bien formadas.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Tarski definition

- ¿Qué se necesita para que la fórmula F sea verdadera en la interpretación M ?
 $- M \models F$
- Se lee: M hace verdadera a F o
 M satisface F

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Denotacion en M

- c denota c^M
- $f(t_1, \dots, t_n)$ denota $f^M(t_1^M, \dots, t_n^M)$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

M satisface a F

- $M \models R(t_1, \dots, t_n)$ si y solo si $R^M(t_1^M, \dots, t_n^M)$ lo es.
- $M \models t_1 = t_2$ si y solo si $t_1^M = t_2^M$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Lenguaje de aritmética con N^*

- $0'$ denota a 1
- $0''$ denota a 2
- $0' + 0''$ denota a ??
- $0'' = 0''''$ es verdadera en N^* ?
- $0' + 0'' < 0''''$ es verdadera en N^* ?
- $0' + 0'' = 0''''$ es verdadera en N^* ?
- $0' + 0$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

M satisface a F (cont.)

- $M \models \sim F$ si y solo si **no** $M \models F$
- $M \models F \& G$ si y solo si $M \models F$ y $M \models G$
- $M \models F \vee G$ si y solo si $M \models F$ o $M \models G$
- $M \models F \rightarrow G$ si y solo si $M \models G$ **si** $M \models F$
- $M \models F \leftrightarrow G$ si y solo si $M \models F$ **si y solo si** $M \models G$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Lenguaje de aritmética con N^*

- $0=0 \& 0<0$ es verdadera en N^* ?
- $0=0 \& 0<0$ es verdadera en N^* ?
- $0=0 \vee 0<0$ es verdadera en N^* ?
- $0=0 \vee 0<0$ es verdadera en N^* ?
- $0=0 \vee \sim 0<0$ es verdadera en N^* ?

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

M satisface a F (cont. 2)

- $M \models \forall x Fx$ si y solo si para todo término t $M \models F(t)$
- $M \models \exists x Fx$ si y solo si existe un término tal que t $M \models F(t)$
- PROBLEMA no todos los elementos del dominio tienen una representación como término

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

M hace verdadera a F (cont. 3)

- $M \models \forall x Fx$ si y solo si para todo m en el dominio $M \models F[m]$
- $M \models \exists x Fx$ si y solo si existe m en el dominio tal que t $M \models F[m]$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Algunas implicaciones de las definiciones

- $(F \& G)$ es verdad si y solo si $\sim(\sim F \vee \sim G)$ es verdad
- $(F \vee G)$ es verdad si y solo si $\sim(\sim F \& \sim G)$ es verdad
- $\forall x F$ es verdad si y solo si $\sim \exists x \sim F$ es verdad
- $\exists x F$ es verdad si y solo si $\sim \forall x \sim F$ es verdad

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Implicación

- ¿A todo esto a que llamamos implicación?
- Un conjunto de fórmulas lógicas Γ implica o tiene como consecuencia a la fórmula D si no hay interpretación que hace a cada fórmula en Γ verdadera pero D falsa.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Ejemplos

- $\sim\sim B$ implica B .
- B implica $(B \vee C)$ and C implica $(B \vee C)$.
- $\sim(B \vee C)$ implica $\sim B$ and $\sim C$.
- $B(t)$ implica $\exists x B(x)$.
- $\sim\exists x B(x)$ implica $\sim B(t)$.
- $s = t$ and $B(s)$ implica $B(t)$.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Más nociones meta-lógicas

- D es **valida** si no existe interpretación que la haga falsa
 - Γ implica D para cualquier Γ
- Γ es **insatisfacible** si no existe interpretación que la haga verdadera
- Γ es **satisfacible** si existe una interpretación que la haga verdadera

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Algunos principios meta-lógicos

- Si $\Gamma \cup \{(A \vee B)\}$ es satisfacible entonces $\Gamma \cup \{A\}$ lo es, o $\Gamma \cup \{B\}$ lo es
- Si $\Gamma \cup \{\exists x B(x)\}$ es satisfacible, entonces para toda constante c que no ocurra en $\Gamma \cup \{\exists x B(x)\}$, $\Gamma \cup \{B(c)\}$ lo es.
- Si es satisfacible, entonces $\Gamma \cup \{t = t\}$ lo es.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Recapitulando

- Sintaxis
 - Símbolos lógicos y no-lógicos
 - Lenguaje lógico
 - Términos y fórmulas bien formadas
- Semántica
 - Interpretación: dominio y denominación
 - Relación interpretación y valor de verdad de una fórmula

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Recapitulación

- Relación valores de verdad de los elementos de una fórmula con su valor de verdad
- Conceptos meta-lógicos
 - Satisfacción ($\models$), relación Interpretación vs fórmula
 - Implicación (o consecuencia), relación entre conjunto de fórmulas con fórmula
 - Fórmula válida
 - Fórmula insatisfacible

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Equivalencia lógica

- Dos fórmulas son equivalentes para una interpretación M si tienen el mismo valor de verdad.
- Dos fórmulas son lógicamente equivalentes si tienen el mismo valor de verdad para todas las interpretaciones.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Teorías

- Conjunto de fórmulas (axiomas) en LPO
 - Ordenes, latices, grafos, álgebras booleanas...
- Una interpretación para la teoría es un modelo de la teoría
- **Consistencia:** No hay contradicción de los axiomas de la teoría
- **Completa:** Cada axioma es un implicación del resto de axiomas

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Teorema de incompletes de Gödel

- Teorías de LPO que contienen una porción considerable de la teoría de los números naturales no pueden ser consistentes y completas al mismo tiempo.

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Sistema deductivo

- Es usado para demostrar usando únicamente sintaxis que una fórmula es una consecuencia de otra fórmulas
- Un sistema deductivo es:
 - correcto si todas las consecuencias derivadas son válidas
 - completo si todas las derivaciones son derivables
 - Efectivo si es posible verificar que una deducción es de hecho posible

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Gödel otra vez

- LPO es indecible
- No existe un proceso de decisión que determine si una fórmula es lógicamente válida
- Sin embargo, implicación lógica es semi-decidible!!

$$F \models G$$

- Enumeramos todas las interpretaciones de F o derivamos todas las implicaciones de F hasta encontrar G

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Reglas de inferencia

- Modus ponens

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Reglas de inferencia

- Introducción &

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \& \beta}$$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Reglas de inferencia

- Eliminación universal

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha\{x / \tau\}}$$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Una deducción

- Bob es un búfalo
- Pat es un cerdo
- Los búfalos son más rápidos que los
- Introducción &
- Eliminación universal
- Modus ponens
- Bb
- Cp
- $\forall x \forall y Bx \& Py \rightarrow Fxy$
- Bb & Cp
- $\forall b \forall p Bb \& Pp \rightarrow Fbp$
- Fbp

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

¿Qué podemos preguntar?

- ¿Una fórmula es verdadera dada una interpretación?
- ¿Estas fórmulas implican a esta otra dada una interpretación?
- ¿Qué interpretación hace verdadera está fórmula?
- ¿Esta formula es válida?
- ¿Esta formulas implican a esta otra?
- ¿Qué formulas implican estás fórmulas?

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Unificación

- Una substitución σ unifica a p y q si $p\sigma = q\sigma$
 - $Kjx \cup Kjt = Kjt$ donde $\sigma = x/t$
 - $Kjx \cup Kyt = Kjt$ donde $\sigma = x/t, y/j$
- Idea: Si P unifica con un hecho P' con substitución σ , entonces aplicar unificación a formulas del tipo $P\sigma \rightarrow Q\sigma$
 - Pa, Px $\rightarrow$ Qx, Pa $\rightarrow$ Qa

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Modus Ponens Generalizado

$$\frac{p'_1, p'_2, \dots, p'_n, (p_1 \& p_2 \& \dots \& p_n \rightarrow \beta)}{\beta\sigma}$$

- Donde

$$p'_i \sigma = p_i \sigma$$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Ejemplo

- Fbp: Faster(bob,pat)
- Fps: Faster(pat,steven)
- Fxy & Fyz $\rightarrow$ Fxz
- $\sigma = x/b, y/p, z/s$
- Fbs: Faster(bob,steven)

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Forward chaining

- Base de conocimiento = Axiomas que sabemos
- Algoritmo:
 - Cuando un nuevo hecho P aparezca
 - Para cada regla con que unifique con P en la premisa
 - Si las otras premisas con conocidas entonces agregar la conclusión en la base de conocimiento

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Ejemplo

Bufalo, Pig, Slug, Faster

● $Bx \& Py \rightarrow Fxy$	● $Ss (Pp \& Ss \rightarrow Fps)$
● $Py \& Sz \rightarrow Fyz$	● $Fps (Fbp \& Fps \rightarrow Fbs,$
$Fps \& Fsz \rightarrow Fpz,$
$Fxp \& Fps \rightarrow Fxs)$
● $Fxy \& Fyz \rightarrow Fxz$	
● $Bb (Bb \& Py \rightarrow Fby)$	● $Fbs (Fbs \& Fsz \rightarrow Fbz,$
$Fxb \& Fbs \rightarrow Fxs)$
● $Pp (Bb \& Pp \rightarrow Fbp,$
$Pp \& Sz \rightarrow Fpz)$	
● $Fbp (Fbp \& Fpz \rightarrow Fbz,$
$Fxb \& Fbp \rightarrow Fxp)$	

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Backward Chaining

- Algoritmo:
 - Cuando alguien pregunta Q
 - Si el hecho Q' unifica con Q regresar Q'
 - Para cada formula cuyo consecuente Q' unifique con Q intentar probar cada una de las premisas usando backward Chaining
 - Esta es la base de programación lógica, esto quiere decir Prolog

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Ejemplo

Pig, Slug, Faster, Slimy, Creeps

● $Py \& Sz \rightarrow Fyz$	● Ls
● $Lz \& Cz \rightarrow Sz$	● Cs
● Pp	
● Ls	
● Cs	
● $Fps ? (Pp \& Ss ? \rightarrow Fps)$	
● Pp ?	
● $Ss ? (Ls \& Cs ? \rightarrow Ss)$	

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Buenas y malas

- ForC y BcJc son completas...
 - Pero solo para Horn clauses ($Ps \rightarrow Q$)
 - $PhD(x) \rightarrow AltamenteCalificado(x)$
 - $\sim PhD(x) \rightarrow DineroPronto(x)$
 - $AltamenteCalificado(x) \rightarrow Millonario(x)$
 - $DineroPronto(x) \rightarrow Millonario(x)$
- ¿Entonces por qué BckC y FckC no concluyen Millonario(ivan)?

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Truco: Resolución

- BckC y ForC son semidecidibles:
 - Quiero $BC \models \alpha$, si esto sucede en algún momento obtengo α
 - Pero si en realidad esto no sucede algunas veces dirá que si y otras que no
- Pero que tal si en lugar trato de mostrar:
 - $BC \& \sim \alpha$ es insatisfacible !!!

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009

Otras lógicas

- Lógica de *primer* orden
 - ¿Si hay primer, hay segundo, o zero?
- Lógica proposicional
 - $\sim$ & $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
- Lógica de segundo orden
 - $\sim$ & $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $\forall$ $\exists$ = () con $\forall$ $\exists$ para predicados
- Lógica modal
 - $\sim$ & $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $\forall$ $\exists$ = () $\diamond$ $\Box$

Dr. Ivan Meza, IIMAS, UNAM, 2009