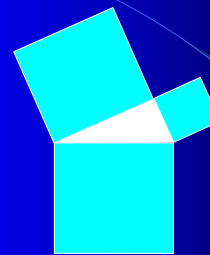


# Descubrimiento y prueba de teoremas diagramáticos: El caso del Teorema de Pitágoras

Dr. Luis Alberto Pineda Cortés  
IIMAS, UNAM

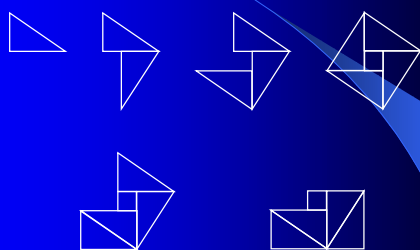
## Teorema de Pitágoras



$$h^2 = a^2 + b^2$$

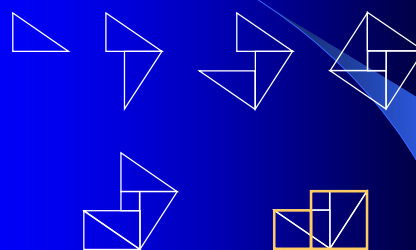
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Prueba del Teorema



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Prueba del Teorema



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## ¿por qué tomarse la molestia?

- Creatividad y el proceso de descubrimiento
- Aprendizaje
- Razonamiento formal pero no verbal
- Un reto para el descubrimiento y prueba de teoremas

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## ¿Qué clase de conocimiento?

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Piaget



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## La inteligencia (Piaget)

- Toda acción:
  - Movimiento
  - Pensamiento
  - Sentimientoes una respuesta a una necesidad
- Toda necesidad es la expresión de un desequilibrio interno o externo
- Toda acción tiende a:
  - Reestablecer el equilibrio del sistema
  - Llevar al sistema como un todo a un equilibrio más estable

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

La inteligencia (Piaget):  
La coordinación de las acciones

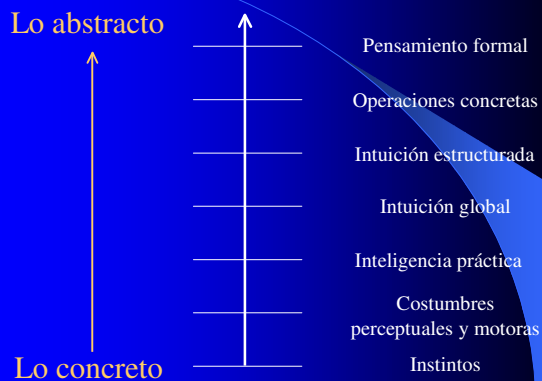
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El desarrollo mental



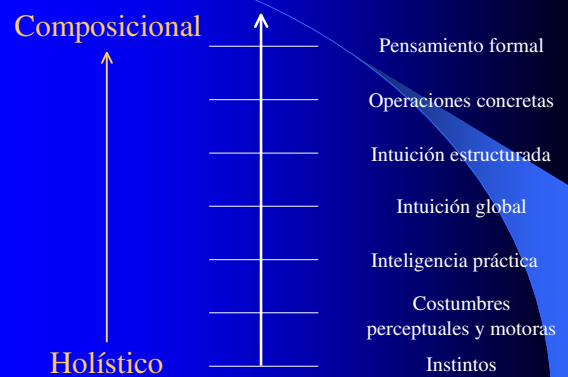
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El desarrollo mental



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El desarrollo mental



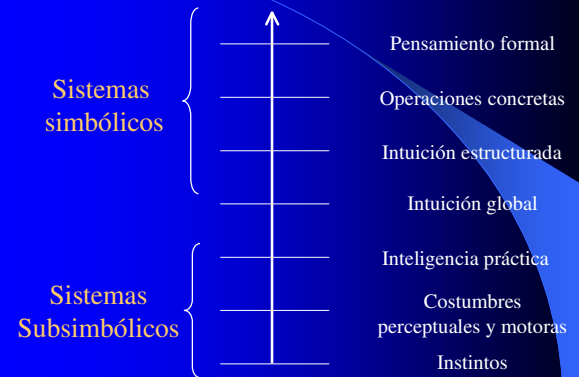
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## La inteligencia (Piaget):

Las acciones de niveles superiores emergen de la coordinación de las acciones de los niveles inferiores

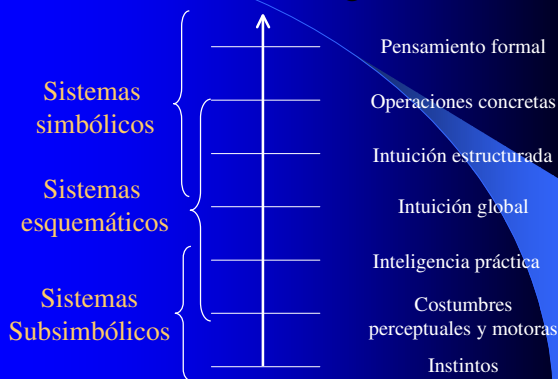
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Sistemas inteligentes



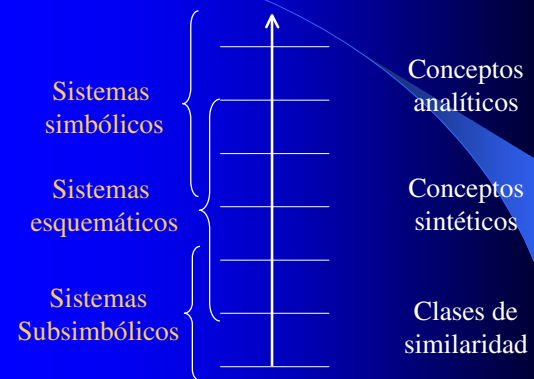
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Sistemas inteligentes



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El conocimiento en AI



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Elementos del razonamiento diagramático

- Intuición estructurada
- Principios de conservación
- Interpretación
- Reinterpretación e inferencia perceptual
- Abstracción

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Elementos de la creatividad

- Intuición estructurada
- Principios de conservación
- Interpretación
- Reinterpretación e inferencia perceptual
- Abstracción

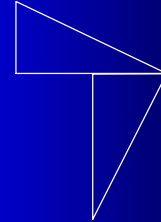
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

# Intuición estructurada



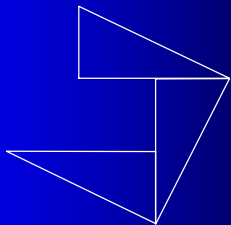
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

# Intuición estructurada



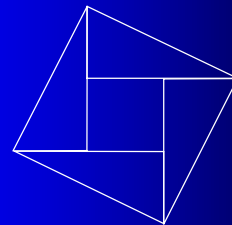
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

# Intuición estructurada



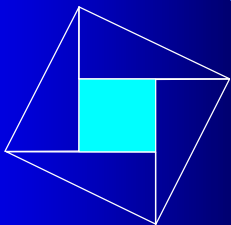
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

# Intuición estructurada



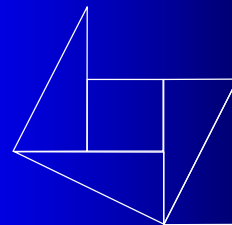
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

# Intuición estructurada



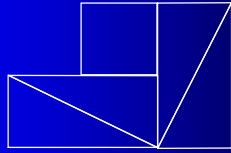
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

# Intuición estructurada



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Intuición estructurada

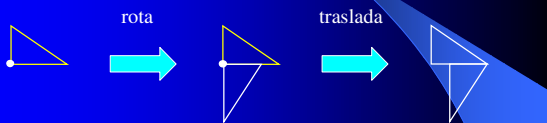


Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Los esquemas de acción

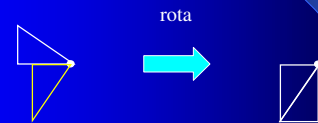
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Esquema de intuición estructurado



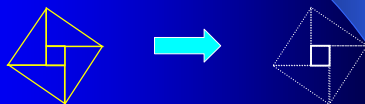
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Esquema de intuición estructurado



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Esquema de intuición estructurado



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

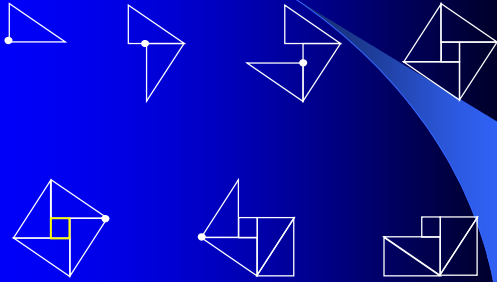
## Razonamiento esquemático



Propagación del flujo de atención

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Razonamiento esquemático



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Intuición estructurada

- Esquemas básicos con diferentes grados de estructura y referidos a ciertos objetos individuales o focos de atención
- Puntos de decisión donde se enlazan los esquemas
- El esquema se aplica de manera global, pero se puede analizar!

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El desarrollo mental



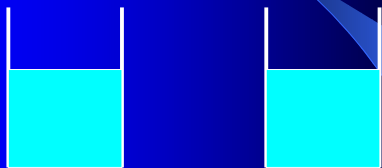
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Elementos de la creatividad

- Intuición estructurada
- Principios de conservación
- Interpretación
- Reinterpretación
- Abstracción

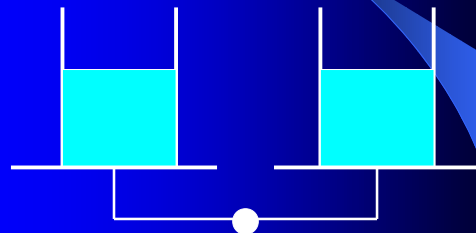
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Los principios de conservación

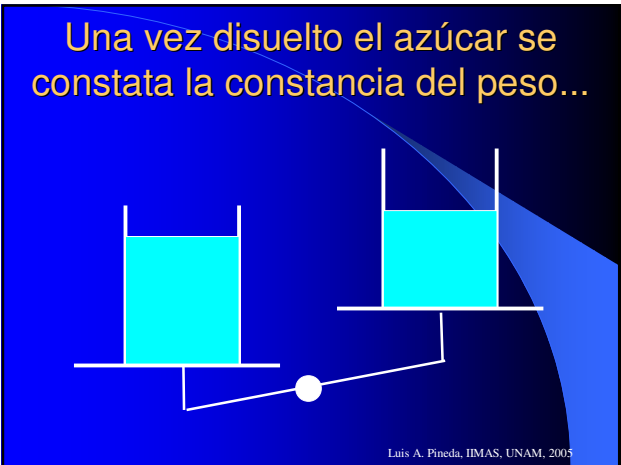
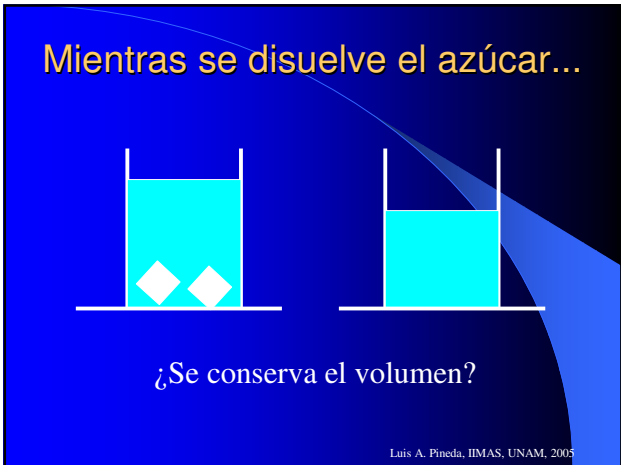
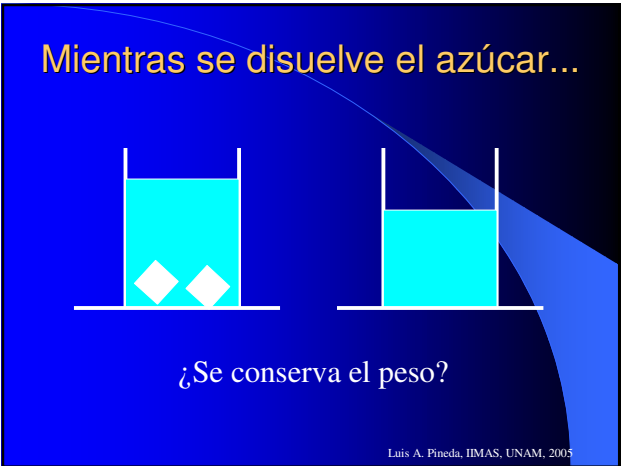
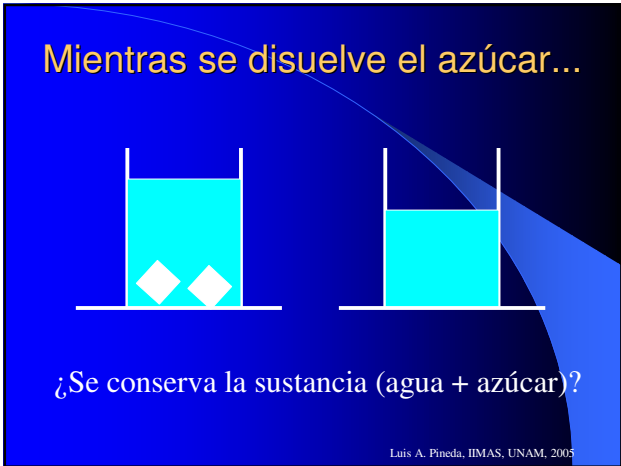
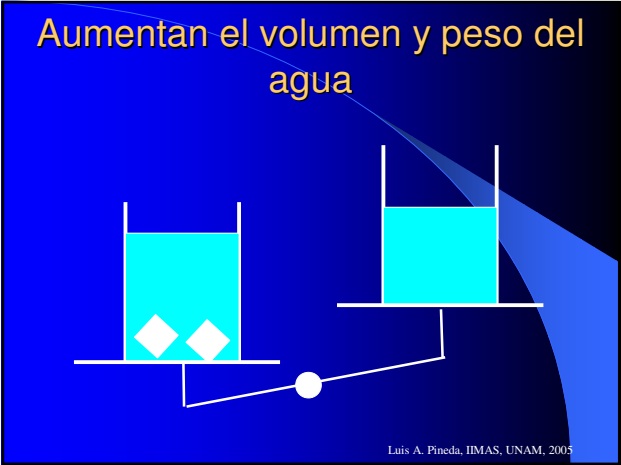
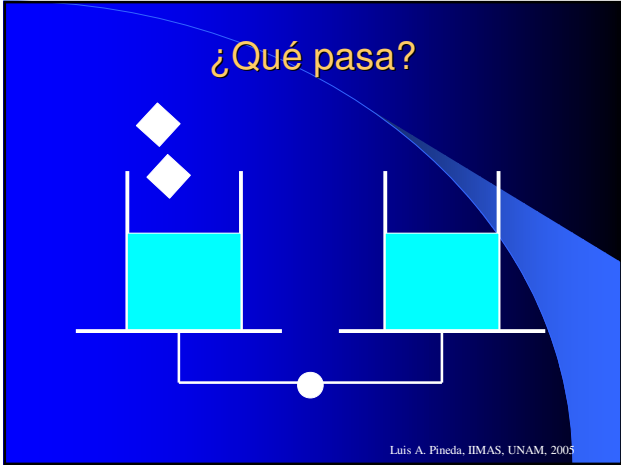


Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

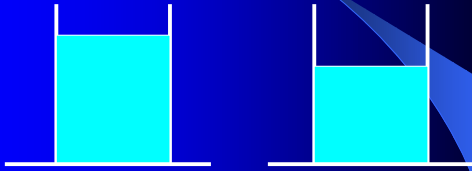
## Los principios de conservación



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005



## Y del volumen...



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Los principios de conservación (menores de 7 años)

- Niegan la conservación del azúcar: ¡si desaparece ya no existe!
- *A fortiori*, niegan la conservación del peso y el volumen!

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Los principios de conservación (hacia los 7 años)

- El azúcar disuelto sigue en el agua:
  - Explicación por transmutación: como un jarabe mezclado con el agua (algunos niños)
  - Explicación atomista: El azúcar se convierte en bolitas invisibles (los más avanzados)
- No hay conservación del peso y el volumen:
  - “Las bolitas no tienen peso ni volumen”
  - Los niños esperan que el peso y volumen se igualen con el otro vaso

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Los principios de conservación (hacia los 9 años)

- Hay conservación del peso:
  - “Las bolitas tienen todas su propio peso, y la suma de todas éstas es el peso de los terrones de azúcar disueltos”
- No hay conservación del volumen:
  - “Las bolitas no tienen volumen”
  - ¡Los niños esperan que el volumen se iguale con el otro vaso!

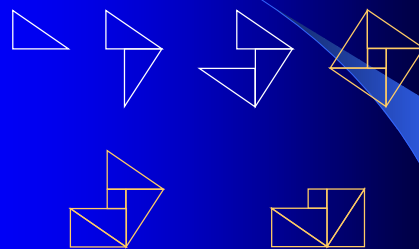
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Los principios de conservación (hacia los 11 o 12 años)

- Hay conservación del volumen:
  - Las bolitas tienen todas su propio volumen, y la suma de estos espacios es el volumen de los terrones disueltos

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

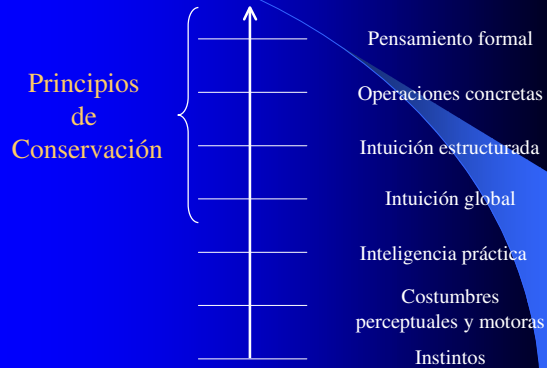
## Conservación de área



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005



## El desarrollo mental



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Elementos de la creatividad

- Intuición estructurada
- Principios de conservación
- Interpretación
- Reinterpretación
- Abstracción

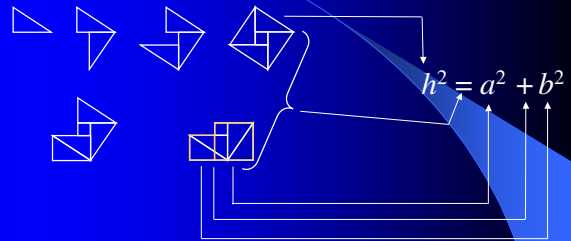
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Interpretación

- Un cuadrado de área  $x^2$  representa al número  $x^2$
- La operación de agrupar dos áreas en el mismo diagrama representa a la operación de sumar
- El principio de conservación de área representa a la operación de igualdad

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

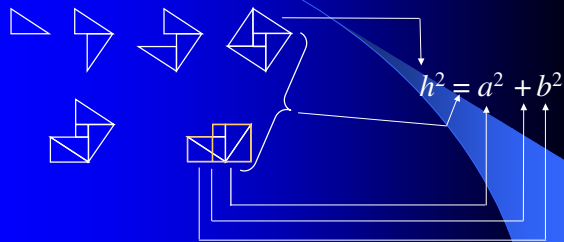
## Interpretación



¿El diagrama es el objeto representacional y el concepto aritmético lo representado?

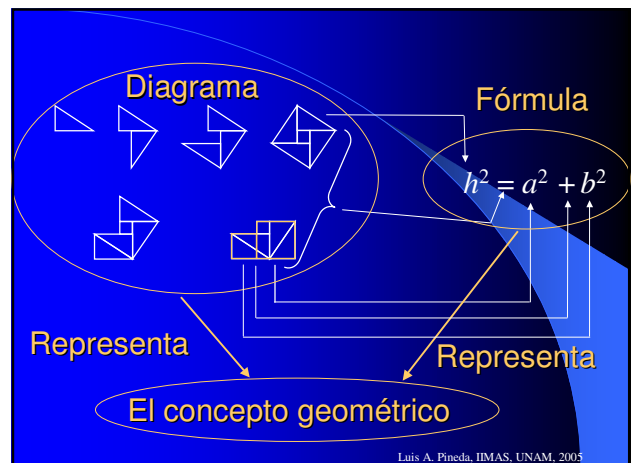
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Morfismo representacional

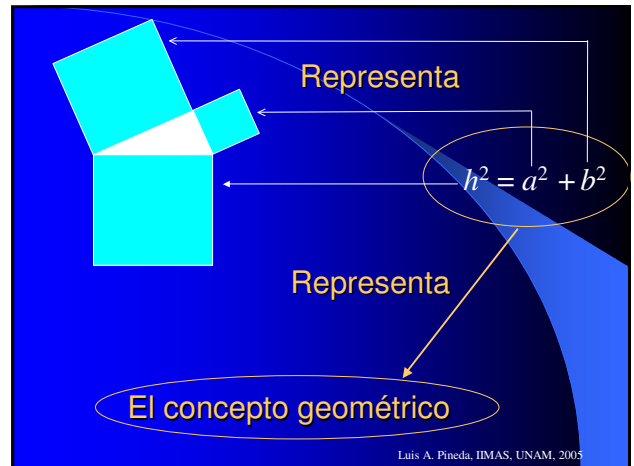
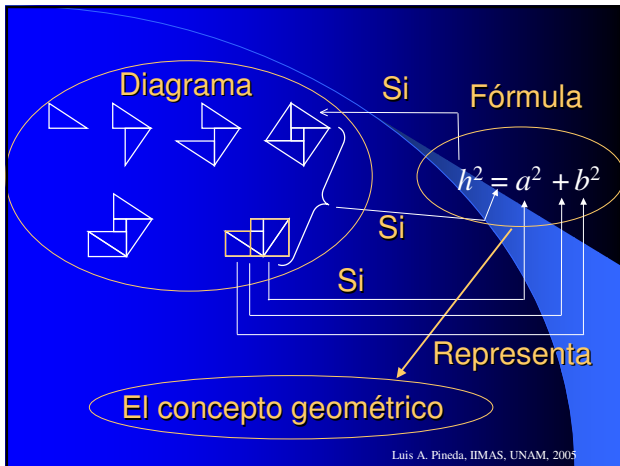
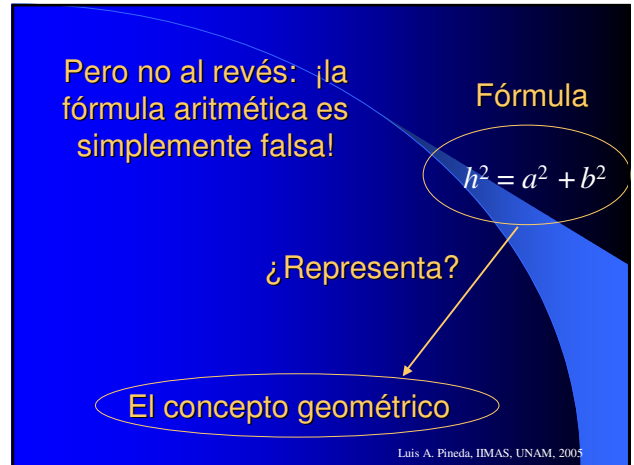
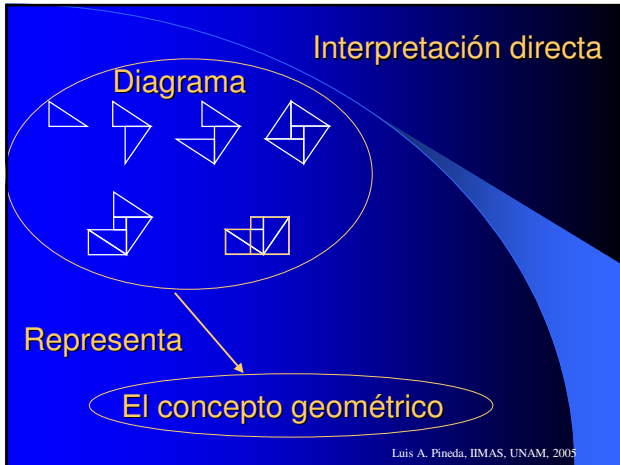


¡El diagrama y la fórmula aritmética son representaciones!

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005



- Elementos de la creatividad**
- Intuición estructurada
  - Principios de conservación
  - Interpretación
  - Reinterpretación
  - Abstracción
- Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005



Conceptos  
sintéticos,  
reinterpretaciones  
e Inferencia  
Perceptual

Ludwig Wittgenstein

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

Cambio de perspectiva conceptual:  
La Reinterpretación



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

La Reinterpretación



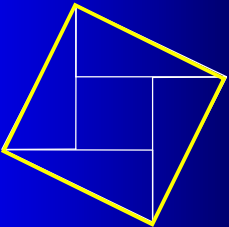
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

Reinterpretación del fondo



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

La reinterpretación de la figura



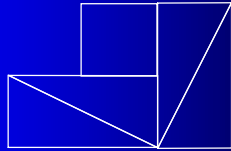
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

Esquema de rotación con  
conservación de área



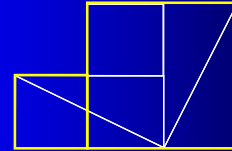
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Esquema de rotación con conservación de área



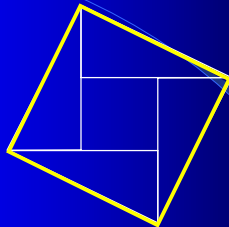
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Reinterpretación y visualización: Esquema perceptual global y estructurado, con conservación de área



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

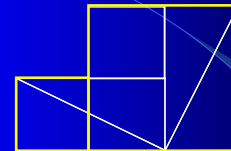
## La inferencia perceptual



Un cuadrado sobre la hipotenusa de un triángulo recto

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## La inferencia perceptual

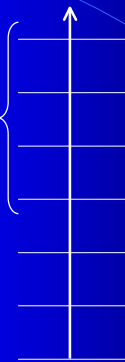


Union de los cuadrados sobre los lados rectos de un triángulo recto

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El desarrollo mental

Reinterpretación



Pensamiento formal  
Operaciones concretas  
Intuición estructurada  
Intuición global  
Inteligencia práctica  
Costumbres perceptuales y motoras  
Instintos

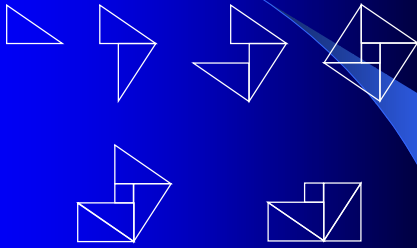
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Elementos de la creatividad

- Intuición estructurada
- Principios de conservación
- Interpretación
- Reinterpretación
- Abstracción

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

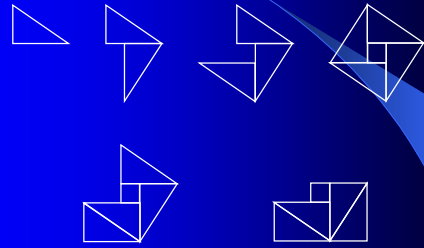
## ¿Una prueba concreta?



¿Cómo sabemos que la relación es cierta para todos los triángulos rectos?

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Un caso de metonimia



¡Tomamos a un objeto concreto para referirnos a la clase entera!

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El pensamiento formal

- La generalización
  - Cuantificación lógica
  - Creación de sistemas generales
- La abstracción
  - Capacidad de referirse a objetos hipotéticos de carácter general
  - Razonamiento verbal

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Representación de la abstracción

- El concepto de función matemática captura de manera general a la noción intuitiva de abstracción
- Abstractar es conocer, tener en la mente, una función matemática!
- Una abstracción es una representación compacta que se refiere a una clase en su totalidad, ya sea que ésta tenga un número finito o infinito de instancias

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El abstractor funcional $\lambda$

- Una función matemática se representa:  
 $\lambda x.f(x)$
- $\lambda$ : símbolo de abstracción funcional
- $f$ : nombre de una función
- $x$ : argumento de la función

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El abstractor funcional $\lambda$

- Aplicación funcional:
  - $\lambda x.triángulo-recto(x)$
  - $\lambda x.triángulo-recto(x)(\triangle)$
  - $triángulo-recto(\triangle)$
  - Si!

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Referencia abstracta vs concreta

- Forma representacional externa:



- Referencia concreta:
  - $\text{triang-rect}(\text{punto}(p_1), \text{punto}(p_2), \text{punto}(p_3))$
- Referencia abstracta:
  - $\lambda x,y,z.\text{triang-rect}(\text{punto}(x), \text{punto}(y), \text{punto}(z))$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El desarrollo mental



Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El proceso creativo

- Búsqueda de forma con un esquema de intuición estructurada
- Tomando en cuenta principios de conservación
- Bajo un esquema de interpretación
- Supervisada por un proceso de reinterpretación
- En el contexto de una abstracción

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El Modelo Computacional

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Módulos computacionales

- Lenguaje de representación e intérprete para el conocimiento:
  - Geométrico
  - Aritmético
- Representación y aplicación de:
  - Esquemas de acción
  - Principios de conservación
  - Función de interpretación
- Reinterpretación e inferencia perceptual:
  - Descripciones concretas
  - Descripciones abstractas

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Lenguaje de representación geométrico

- Predicados para referirse a objetos geométricos, con sus propiedades y relaciones
- Abstracción funcional:  $\lambda x.f(x)$
- Descriptor geométrico para referirse a objetos en contexto:  $t \Leftarrow f$ 
  - Si  $f(a)$  es verdad  $(t \Leftarrow f) = t$  tal que  $x$  es (posiblemente) una variable en  $t$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Lenguaje de representación aritmético

- El cálculo lambda
  - Representación de los números cuadrados
  - Operadores para funciones “+” & “sq”
  - Evaluación y aplicación de funciones
- Sistema intérprete

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Principio de conservación de área

- Conservación global:
  - $\lambda P \lambda Q (area(P) = area(Q))$
- Conservación estructurada:
  - $\lambda P \lambda Q \lambda x (area(P(x)) = area(Q(x)))$

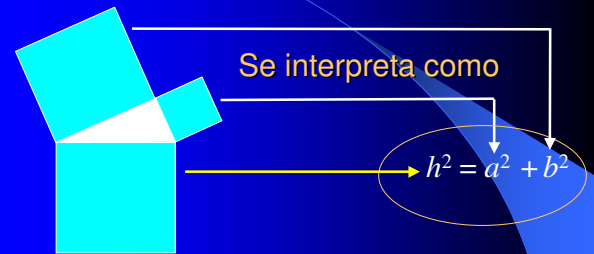
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Y en la aritmética...

- Concepto de igualdad:
  - $\lambda P \lambda Q (P = Q)$
- Conservación de la igualdad:
  - $\lambda P \lambda Q \lambda x (P(x) = Q(x))$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Función de interpretación



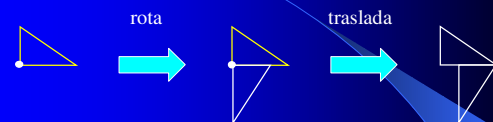
Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Función de interpretación

- Función de interpretación:
  - $\phi(x \leq f) = \lambda([u], u^2)$  si el tipo de  $x$  en  $f$  es  $sq$
  - $\phi(union) = +$
  - $\phi(g(y_1, y_2) \leq f) = \phi(g)(\phi(y_1 \leq f), \phi(y_2 \leq f))$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Intuición estructurada



Esquema de acción:

$$mod_{i+1} = traslada(rota(foco, -90^\circ, vértice\_recto(foco)), \delta)$$

Donde  $\delta = a - b$

Atención sobre objetos y partes de objetos!

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Razonamiento esquemático



Propagación del flujo de atención

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Descripción concreta

- Diagrama:



- Descripción:

$sq1 \Leftarrow \text{triang-rect}(rt1) \ \& \ \text{cuadrado}(sq) \ \& \ \text{lado}(\text{hipotenusa}(rt1), sq1)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Descripción abstracta

- Diagrama:



- Descripción:  $y \Leftarrow f_1$

- Donde:

$f_1 = \lambda x \lambda y. \text{triang-rect}(x) \ \& \ \text{cuadrado}(y) \ \& \ \text{lado}(\text{hipotenusa}(x), y)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Descripción concreta

- Diagrama:



- Descripción:

$\text{union}(sq1, sq2) \Leftarrow \text{triang-rect}(rt1) \ \& \ \text{cuadrado}(sq1) \ \& \ \text{cuadrado}(sq2) \ \& \ \text{lado}(\text{lado-a}(rt1), sq1) \ \& \ \text{lado}(\text{lado-b}(rt1), sq2)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Descripción abstracta

- Diagrama:



- Descripción:

$\text{union}(y, z) \Leftarrow f_2$

- Donde:

$f_2 = \lambda x \lambda y \lambda z. \text{triang-rect}(x) \ \& \ \text{cuadrado}(y) \ \& \ \text{cuadrado}(z) \ \& \ \text{lado}(\text{lado-a}(x), y) \ \& \ \text{lado}(\text{lado-b}(x), z)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Síntesis computacional del teorema de Pitágoras

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005



## La semilla...

- Diagrama:



- La expectativa geométrica:

- $\lambda P \lambda Q \lambda x (area(P(x)) = area(Q(x)))$

- La expectativa aritmética:

- $\lambda P \lambda Q (P = Q)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Intuición estructurada

- Diagrama:



- La expectativa geométrica:

- $\lambda P \lambda Q \lambda x (area(P(x)) = area(Q(x)))$

- La expectativa aritmética:

- $\lambda P \lambda Q (P = Q)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Intuición estructurada

- Diagrama:



- La expectativa geométrica:

- $\lambda P \lambda Q \lambda x (area(P(x)) = area(Q(x)))$

- La expectativa aritmética:

- $\lambda P \lambda Q (P = Q)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Intuición estructurada

- Diagrama:



- La expectativa geométrica:

- $\lambda P \lambda Q \lambda x (area(P(x)) = area(Q(x)))$

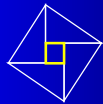
- La expectativa aritmética:

- $\lambda P \lambda Q (P = Q)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Reinterpretación de fondo

- Diagrama:



- La expectativa geométrica:

- $\lambda P \lambda Q \lambda x (area(P(x)) = area(Q(x)))$

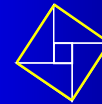
- La expectativa aritmética:

- $\lambda P \lambda Q (P = Q)$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Reinterpretación de Figura

- Reinterpretación: Preserva el área



- La expectativa:

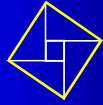
- $\lambda P \lambda Q \lambda x (area(P(x)) = area(Q(x))) (w \Leftarrow f_1)$

- $\lambda P \lambda Q (P = Q) (\lambda([u], u^2))$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Reinterpretación de Figura

- Diagrama:



- La expectativa geométrica:

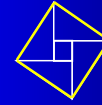
$$\lambda P \lambda Q \lambda x (area(P(x)) = area(Q(x)) (w \leq f_1))$$

$$\lambda Q \lambda x (area((w \leq f_1)(x)) = area(Q(x)))$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Reinterpretación de Figura

- Diagrama:



- La expectativa aritmética:

$$-\lambda P \lambda Q (P = Q) (\lambda([u], u^2))$$

$$-\lambda Q ((\lambda([u], u^2) = Q))$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Intuición estructurada

- Diagrama:



- La expectativa geométrica:

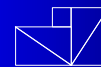
$$-\lambda Q \lambda x (area((w \leq f_1)(x)) = area(Q(x)))$$

$$-\lambda Q ((\lambda([u], u^2) = Q))$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Intuición estructurada

- Diagrama:



- La expectativa:

$$-\lambda Q \lambda x (area((w \leq f_1)(x)) = area(Q(x)))$$

$$-\lambda Q ((\lambda([u], u^2) = Q))$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Reinterpretación de Figura

- Reinterpretación (se preserva el área):



- La expectativa:

$$-\lambda Q \lambda x (area((w \leq f_1)(x)) = area(Q(x)) (union(y, z) \leq f_2))$$

$$-\lambda Q ((\lambda([u], u^2) = Q) + ((\lambda([v], v^2), (\lambda([w], w^2))))$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Reinterpretación de Figura

- Diagrama:



- La expectativa geométrica:

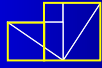
$$-\lambda Q \lambda x (area((w \leq f_1)(x)) = area(Q(x)) (union(y, z) \leq f_2))$$

$$-\lambda x (area((w \leq f_1)(x)) = area((union(y, z) \leq f_2)(x)))$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Reinterpretación de Figura

- Diagrama:



- La expectativa aritmética:

- $\lambda Q((\lambda([u], u^2) = Q) + ((\lambda([v], v^2), (\lambda([w], w^2))))$
- $\lambda([u], u^2) = +((\lambda([v], v^2), (\lambda([w], w^2)))$
- $\lambda([u, v, w], u^2 = +(v^2, w^2))$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El concepto geométrico

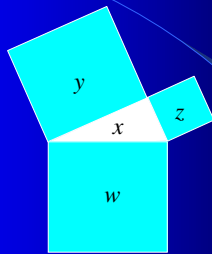
- $\lambda x(\text{area}((w \leq f_1)(x)) = \text{area}((\text{union}(y, z) \leq f_2)(x))$
- Donde:

$$f_1 = \lambda w.\text{triang-rect}(x) \ \& \ \text{cuadrado}(w) \ \& \ \text{lado}(\text{hipotenusa}(x), w)$$

$$f_2 = \lambda y\lambda z.\text{triang-rect}(x) \ \& \ \text{cuadrado}(y) \ \& \ \text{cuadrado}(z) \ \& \ \text{lado}(\text{lado-a}(x), y) \ \& \ \text{lado}(\text{lado-b}(x), z)$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Teorema de Pitágoras

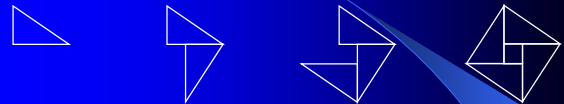


$$\lambda x(\text{area}((w \leq f_1)(x)) = \text{area}((\text{union}(y, z) \leq f_2)(x))$$

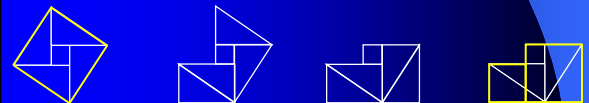
$$\lambda([u, v, w], u^2 = +(v^2, w^2))$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El programa de descubrimiento



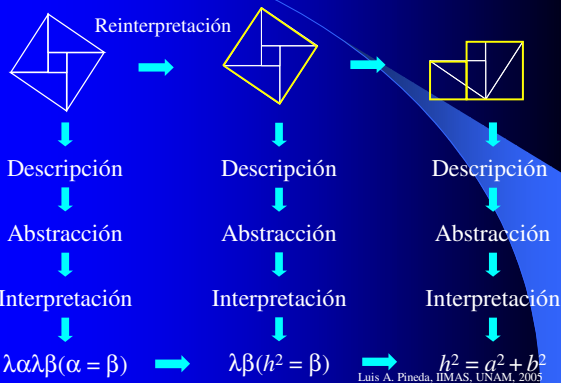
$$\lambda\alpha\lambda\beta(\alpha = \beta) \quad \lambda\alpha\lambda\beta(\alpha = \beta) \quad \lambda\alpha\lambda\beta(\alpha = \beta) \quad \lambda\alpha\lambda\beta(\alpha = \beta)$$



$$\lambda\beta(h^2 = \beta) \quad \lambda\beta(h^2 = \beta) \quad \lambda\beta(h^2 = \beta) \quad h^2 = a^2 + b^2$$

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El programa de descubrimiento



## El Programa

- Síntesis de teoremas diagramáticos a partir de:
  - Principios de conservación
  - Esquemas de producción diagramáticos
  - Descripciones abstractas de diagramas
  - Una interpretación
- Producto del sistema:
  - Función matemática sobre el dominio de la geometría que representa al teorema
  - Función aritmética que representa al teorema

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Programa Interactivo

- Inferencia computacional:
  - Aplicación de esquemas de acción
  - Aplicación de Principios de conservación
  - Síntesis y aplicación de conceptos geométricos y aritméticos
- Inferencia mixta:
  - Selección de foco y esquema de acción
- Inferencia humana:
  - Síntesis de descripciones de objetos geométricos en contexto

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## El reto

- ✓ Construcción de un programa probador y descubridor de teoremas diagramáticos
- Descubrir nuevos teoremas

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

## Modelo computacional del proceso creativo

- Búsqueda de forma con un esquema de intuición estructurada
- Tomando en cuenta principios de conservación
- Bajo un esquema de interpretación
- Supervisada por un proceso de reinterpretación
- En el contexto de una abstracción

Luis A. Pineda, IIMAS, UNAM, 2005

# FIN