Curso de Álgebra (2000) – Facultad de Química, UNAM

por Carlos Velarde V.

Fórmulas de Cardan para resolver la ecuación polinomial de tercer grado

Las fórmulas de Cardan para resolver la ecuación

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1}$$

son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{A} - \frac{p}{3\sqrt[3]{A}} + k \\ x_2 &= \omega\sqrt[3]{A} - \omega^2\frac{p}{3\sqrt[3]{A}} + k \\ x_3 &= \omega^2\sqrt[3]{A} - \omega\frac{p}{3\sqrt[3]{A}} + k \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ p &= 3k^2 + 2bk + c \\ q &= k^3 + bk^2 + ck + d \\ k &= -\frac{b}{3} \\ \omega &= \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

(ω es la raíz cúbica de 1 de ángulo $2\pi/3$), en el entendido de que $\sqrt{\ }$ y $\sqrt[3]{\ }$ dan, respectivamente, la raíz cuadrada y la raíz cúbica *principal* de un número complejo.

Veamos como se obtienen las fórmulas anteriores. Primero se elimina el término de segundo grado, de la siguiente manera. Mediante el "cambio de variable"

$$x = y + k \tag{2}$$

sustituyendo en (1) se obtiene:

$$(y+k)^3 + b(y+k)^2 + c(y+k) + d = 0$$

ecuación que se puede escribir así:

$$y^3 + (3k+b)y^2 + (3k^2 + 2bk + c)y + k^3 + bk^2 + ck + d = 0$$

de donde se ocurre anular el coeficiente de y^2 haciendo

$$k = -\frac{b}{3} \tag{3}$$

por lo que la ecuación en y queda así:

$$y^3 + (3k^2 + 2bk + c)y + k^3 + bk^2 + ck + d = 0$$

Llamando p al coeficiente de y y q al término constante, es decir, mediante las definiciones

$$p = 3k^2 + 2bk + c \tag{4}$$

$$q = k^3 + bk^2 + ck + d \tag{5}$$

la ecuación en y se puede escribir así:

$$y^3 + py + q = 0 \tag{6}$$

El segundo paso consiste en eliminar el término de primer grado. Para ello se "cambia la variable" y por la suma de dos nuevas variables:

$$y = u + v \tag{7}$$

y se sustituye en (6), para dar lugar a la ecuación

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

misma que se puede reescribir así:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

Si ahora se pide que

$$3uv + p = 0 \tag{8}$$

la ecuación anterior se simplifica, quedando así:

$$u^3 + v^3 + q = 0 \tag{9}$$

En esta ecuación no aparecen términos de segundo ni de primer grado, pero tiene dos términos de tercer grado. Sin embargo, de (8) se obtiene una de las variables en términos de la otra:

$$v = -\frac{p}{3u} \tag{10}$$

para ser sustituída en (9) y obtener:

$$u^3 - \left(\frac{p}{3u}\right)^3 + q = 0$$

de donde, multiplicando por u^3 se llega a:

$$(u^3)^2 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \tag{11}$$

que es una ecuación de segundo grado en u^3, es decir, con un nuevo "cambio de variable":

$$u^3 = z \tag{12}$$

obtenemos la ecuación:

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \tag{13}$$

que sabemos tiene dos soluciones, una de las cuales resulta ser:

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Sustituyendo en (12) este valor de z se obtiene la ecuación

$$u^3 = A \tag{14}$$

cuyas tres soluciones —las raíces cúbicas de A— también satisfacen la ecuación (11). Estos valores de u son:

$$u_1 = \sqrt[3]{A} \qquad u_2 = \omega\sqrt[3]{A} \qquad u_3 = \omega^2\sqrt[3]{A}$$

en que $\omega = \operatorname{cis}(2\pi/3)$. Sustituyendo en (10) y dado que $\omega\omega^2 = 1$, estos valores de u determinan respectivos valores de v:

$$v_1 = -\frac{p}{3\sqrt[3]{A}} \qquad v_2 = -\omega^2\frac{p}{3\sqrt[3]{A}} \qquad v_3 = -\omega\frac{p}{3\sqrt[3]{A}}$$

Por último, sustituyendo en (7) estas parejas de valores de u y v se obtienen tres valores de y, los cuales al ser a su vez sustituídos en (2) dan las tres soluciones de (1).