Curso de Álgebra (2000) – Facultad de Química, UNAM

Ejercicios para la unidad 3 (Sistemas numéricos)

por Carlos Velarde V.

1. Con la suma y multiplicación usuales, diga cual(es) de los siguientes conjuntos constituyen un campo. En cada caso justifique la respuesta. a) El conjunto de los números racionales. b) El conjunto de los números irracionales. c) El conjunto de los números enteros.

Definición 1. Un *campo* es un conjunto C y dos operaciones, $+ : C\times C \to C$ (suma) y $\cdot : C\times C \to C$ (multiplicación), con las nueve propiedades siguientes:

s1:	$x+(y+z)=(x+y)+z$	**m1:**	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
s2:	$x+y=y+x$	**m2:**	$x\cdot y=y\cdot x$
s3:	$\exists 0\in C\forall x(x+0=x)$	**m3:**	$\exists 1\in C\forall x(x\cdot 1=x)$
s4:	$\forall x\exists -x(x+(-x)=0)$	**m4:**	$\forall x\neq 0\exists x^{-1}(x\cdot x^{-1}=1)$

d: $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$

Solución:

a) Como la suma y la multiplicación usuales al aplicarse a números racionales dan por resultado un número racional, tenemos que dichas operaciones quedan bien definidas al restringirlas a elementos del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales (es decir, $\mathbb{Q}$ es *cerrado* respecto a esas operaciones).

Como $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, **s1, s2, m1, m2 y d** se cumplen para cualesquiera $x,y,z\in\mathbb{Q}$. Como $0,1\in\mathbb{Q}$, se cumplen **s3 y m3**. **s4** se cumple porque el inverso aditivo de un número racional también es racional. **m4** se cumple porque el inverso multiplicativo de un número racional también es racional. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ con la suma y la multiplicación usuales constituyen un campo.

b) El conjunto de los números irracionales, $\mathbb{I}=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, no es cerrado respecto a la suma ($\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\notin\mathbb{I}$) ni respecto a la multiplicación ($\sqrt{2}\sqrt{2}=2\notin\mathbb{I}$), es decir, no son funciones de $\mathbb{I}\times\mathbb{I}$ en $\mathbb{I}$. Por lo tanto, ni siquiera se pueden considerar como las operaciones requeridas para definir como campo a $\mathbb{I}$.

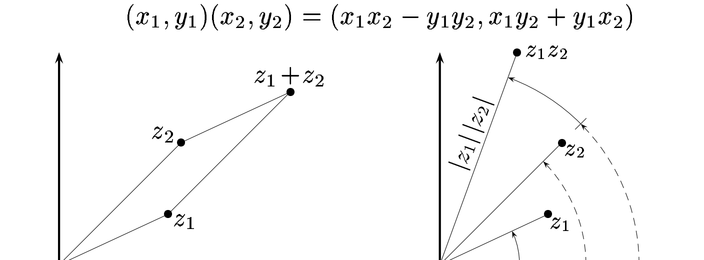
c) El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es cerrado respecto a las dos operaciones (es decir, $+,\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ si son funciones). Sin embargo, no se cumple **m4** ($2^{-1}\notin\mathbb{Z}$), por lo tanto, $\mathbb{Z}$ junto con esas operaciones no constituyen un campo.

Definición 2. El sistema numérico de los *números complejos* lo constituyen el conjunto

$$\mathbb{C}=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}\qquad(=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

y las operaciones de suma y multiplicación (funciones de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$) definidas a continuación:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)$$



Interpretación geométrica de la suma y la multiplicación de dos números complejos $z_1=(x_1,y_1)$ y $z_2=(x_2,y_2)$.

El sistema anterior es un campo.

2. Demuestre **s3** y **m3** para $\mathbb{C}$.
Solución: Debemos probar la existencia en $\mathbb{C}$ del neutro aditivo y del neutro multiplicativo.
Prueba. $(0,0)$ es el neutro aditivo, ya que para todo $(x,y)\in\mathbb{C}$ se cumple la igualdad $(x,y)+(0,0)=(x,y)$. $(1,0)$ es el neutro multiplicativo, pues para todo $(x,y)\in\mathbb{C}$ la igualdad $(x,y)(1,0)=(x,y)$ es válida. □

3. Demuestre **m4** para $\mathbb{C}$, es decir, que todo $(x,y)\neq(0,0)$ tiene inverso multiplicativo.
Solución:
Prueba. Sea $(x,y)\in\mathbb{C}$, $(x,y)\neq(0,0)$, veamos que tiene inverso multiplicativo, es decir, que existe un número (u,v) que satisface la ecuación

$$(x,y)(u,v)=(1,0)\,.$$

Efectuando el producto que aparece a la izquierda de esta ecuación, obtenemos la siguiente:

$$(xu-yv,yu+xv)=(1,0)\,,$$

misma que es equivalente al sistema (de incógnitas u y v)

$$\begin{aligned} xu-yv &= 1\\ yu+xv &= 0\end{aligned}$$

que tiene solución única, pues su determinante, x^2+y^2, es distinto de 0 porque $(x,y)\neq(0,0)$. Aplicando las fórmulas de Cramer se obtiene que $u=x/(x^2+y^2)$ y $v=-y/(x^2+y^2)$, o sea que:

$$(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\qquad\square$$

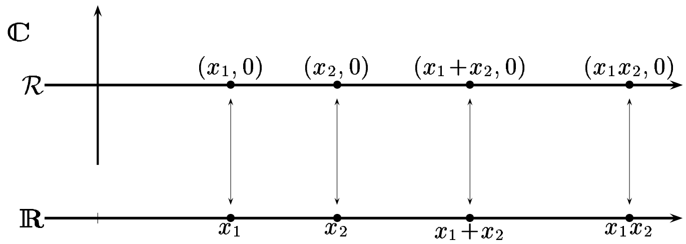
4. Demuestre **d** para $\mathbb{C}$, es decir, que la multiplicación se distribuye sobre la suma.
Solución: Sean $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ y $z_3=(x_3,y_3)$; debemos probar que $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.
Prueba.

$$\begin{aligned} &z_1(z_2+z_3)\\ &\quad=(x_1,y_1)\big((x_2,y_2)+(x_3,y_3)\big)\\ &\quad=(x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3)\\ &\quad=\big(x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3),x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)\big)\\ &\quad=(x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3,x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3)\\ &\quad=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)+(x_1x_3-y_1y_3,x_1y_3+y_1x_3)\\ &\quad=(x_1,y_1)(x_2,y_2)+(x_1,y_1)(x_3,y_3)\\ &\quad=z_1z_2+z_1z_3\end{aligned}$$

□

Definición 3. $i=(0,1)$.
El subconjunto de $\mathbb{C}$ de los números complejos de segunda componente igual a 0, $\mathcal{R}=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$, es cerrado respecto a las operaciones: $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)\in\mathcal{R}$ y $(x_1,0)(x_2,0)=(x_1x_2,0)\in\mathcal{R}$. Además, estableciendo la correspondencia uno a uno $x\leftrightarrow(x,0)$ entre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{R}$, se tiene que al sumar o multiplicar en $\mathcal{R}$ los números correspondientes a x_1 y x_2, se obtiene el número que corresponde a x_1+x_2 ó a x_1x_2, respectivamente (se dice entonces que $\mathbb{R}$ y $\mathcal{R}$ son *isomorfos* respecto a la suma y a la multiplicación). Debido a esto, $\mathcal{R}$ y $\mathbb{R}$ se pueden identificar y ver a $\mathcal{R}$ como una “copia” de $\mathbb{R}$ incluida en $\mathbb{C}$ (es en este sentido que se considera a $\mathbb{R}$ como

un subconjunto de $\mathbb{C}$) y se conviene en escribir simplemente x para denotar al número complejo $(x, 0)$.



La correspondencia $x \leftrightarrow (x, 0)$ es un isomorfismo de suma y multiplicación entre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{R}$ (el eje horizontal). Dicho de otra manera, la suma y la multiplicación en $\mathbb{C}$, restringidas a $\mathcal{R}$, se comportan como las respectivas operaciones en $\mathbb{R}$.

De acuerdo con lo anterior, la igualdad $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ —confírmela— puede escribirse en la forma

$$i^2 = -1 \qquad (1)$$

y la igualdad $(x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1)$ —confírmela— así:

$$(x, y) = x + yi$$

Esta última justifica la notación "$x+yi$", la más utilizada para representar al número complejo (x, y). Así, las definiciones de suma y multiplicación se pueden escribir de la siguiente manera:

$$(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \qquad (2)$$
$$(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i \qquad (3)$$

las que pueden recordarse fácilmente, sumando y multiplicando las expresiones algebraicas $x + yi$ en la forma acostumbrada, usando (1) para simplificar cuando se requiera.

Definición 4 (de *módulo* ó *tamaño* de un número complejo).

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Definición 5 (de *conjugado* de un número complejo).

$$\overline{(x, y)} = (x, -y)\,.$$

Propiedades. Sea $z \in \mathbb{C}$.

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad (4)$$
$$z\overline{z} \in \mathbb{R} \qquad (5)$$
$$|z|^2 = z\overline{z} \qquad (6)$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0) \qquad (7)$$

5. Sean $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 6 - i$ y $z_3 = \sqrt{2}i$. Efectuar las operaciones siguientes, dando el resultado en la forma $a + bi$:

a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 - z_2$ **c)** z_1z_2 **d)** $z_1 + z_3$
e) $\overline{z_3}$ **f)** $z_1\overline{z_2}$ **g)** $\frac{z_1}{z_2}$ **h)** $\frac{z_2 + \overline{z_3}}{z_1}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (6 - i) = 8 + 2i\,.$

b) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (6 - i) = -4 + 4i\,.$

c) $z_1z_2 = (2 + 3i)(6 - i) = 12 - 3i^2 + -2i + 18i = 15 + 16i\,.$

d) $z_1 + z_3 = (2 + 3i) + \sqrt{2}i = 2 + (3 + \sqrt{2})i\,.$

e) $\overline{z_3} = \overline{\sqrt{2}i} = -\sqrt{2}i\,.$

f) $z_1\overline{z_2} = (2 + 3i)\overline{(6 - i)} = (2 + 3i)(6 + i) = 9 + 20i\,.$

g) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(2 + 3i)\overline{(6 - i)}}{(6 - i)\overline{(6 - i)}} = \frac{(2 + 3i)(6 + i)}{(6 - i)(6 + i)} =$
$= \frac{9 + 20i}{37} = \frac{9}{37} + \frac{20}{37}i\,.$

h) $\frac{z_2 + \overline{z_3}}{z_1} = \frac{(6 - i) + \overline{\sqrt{2}i}}{2 + 3i} = \frac{6 - (1 + \sqrt{2})i}{2 + 3i} =$
$= \frac{(6 - (1 + \sqrt{2})i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} =$
$= \frac{9 - 3\sqrt{2}}{13} - \frac{20 + 2\sqrt{2}}{13}i\,.$

6. Efectuar las operaciones indicadas, dando el resultado en la forma $a + bi$:

a) $2(1 - i) + 3(1 + i)$ **b)** $(1 - i)(1 + i)$
c) $(3 - 4i)(-2 + 4i)$ **d)** $1/i$
e) $(1 - i)/(1 + i)$ **f)** $(1 + i)^3$
g) i^n $(n \in \mathbb{N})$ **h)** $i^{24} + i^7 + i^6$
i) $(1 + i)^{-1} + (1 - i)^{-1}$ **j)** $(1 + i)^{-1} - (1 - i)^{-1}$

Solución:

a) $2(1 - i) + 3(1 + i) = 2 - 2i + 3 + 3i = 5 + i\,.$

b) $(1 - i)(1 + i) = 2\,.$

c) $(3 - 4i)(-2 + 4i) = 10 + 20i\,.$

d) $\frac{1}{i} = \frac{\overline{i}}{i\overline{i}} = \frac{-i}{i(-i)} = -i\,.$

e) $\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-2i}{2} = -i\,.$

f) $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i\,.$

g) Para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tenemos: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$. Todo número n se puede descomponer en la forma $n = 4m + k$, con $m, k \in \mathbb{N}$ y $k < 4$ (m y k son el cociente y el residuo obtenidos al dividir n entre 4, es decir, $m = n \operatorname{div} 4$ y $k = n \bmod 4$). Entonces

$$i^n = i^{4m+k} = i^{4m}i^k = (i^4)^m i^k = i^k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ i, & \text{si } k = 1; \\ -1, & \text{si } k = 2; \\ -i, & \text{si } k = 3. \end{cases}$$

es decir,

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \bmod 4 = 0; \\ i, & \text{si } n \bmod 4 = 1; \\ -1, & \text{si } n \bmod 4 = 2; \\ -i, & \text{si } n \bmod 4 = 3. \end{cases}$$

h) $i^{24} + i^7 + i^6 = i^{24 \bmod 4} + i^{7 \bmod 4} + i^{6 \bmod 4} = i^0 + i^3 + i^2 =$
$= 1 - i - 1 = -i\,.$

i) $(1 + i)^{-1} + (1 - i)^{-1} = \frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i} = \frac{(1 - i) + (1 + i)}{(1 + i)(1 - i)} =$
$= 1\,.$

j) $(1 + i)^{-1} - (1 - i)^{-1} = \frac{1}{1 + i} - \frac{1}{1 - i} = \frac{(1 - i) - (1 + i)}{(1 + i)(1 - i)} =$
$= -i\,.$

7. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(2-5i)z = 1$ **b)** $(1-2i)z+3=0$
c) $(1+i)z-(1-i)=4$ **d)** $z+(1/z)=0 \quad (z\neq 0)$
e) $z-\overline{z}=4i$ **f)** $z+\overline{z}=4$

Solución:

a) $z = \dfrac{1}{2-5i} = \frac{1}{29}(2+5i)$.

b) $z = -\dfrac{3}{1-2i} = -\frac{3}{5}(1+2i)$.

c) $z = \dfrac{5-i}{1+i} = 2-3i$.

d) La ecuación es equivalente a $z^2=-1$, entonces $z=\pm i$.

e) Con $z=x+yi$, la ecuación es $(x+yi)-(x-yi)=4i$, equivalente a $2yi=4i$, de donde se sigue que $y=2$. Entonces $z=x+2i \quad (x\in\mathbb{R})$.

f) Procediendo como en el inciso anterior, en este caso se obtiene $z=2+yi \quad (y\in\mathbb{R})$.

8. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} (1-i)\; z_1 & + & 2i\; z_2 & = & 3 \\ 4\; z_1 & + & (1-i)\; z_2 & = & 2+i \end{array}$$

Solución: Los métodos de eliminación y determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes y variables reales se derivan de las propiedades que definen como campo a $\mathbb{R}$; puesto que $\mathbb{C}$ también es campo, tales métodos también sirven para sistemas con coeficientes y variables en $\mathbb{C}$. Usemos determinantes para resolver el sistema dado:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 2i \\ 4 & 1-i \end{vmatrix} = (-2i)-(8i) = -10i\,,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2i \\ 2+i & 1-i \end{vmatrix} = 3(1-i)-2i(2+i) = 5-7i\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-i & 3 \\ 4 & 2+i \end{vmatrix} = (1-i)(2+i)-12 = -9-i\,,$$

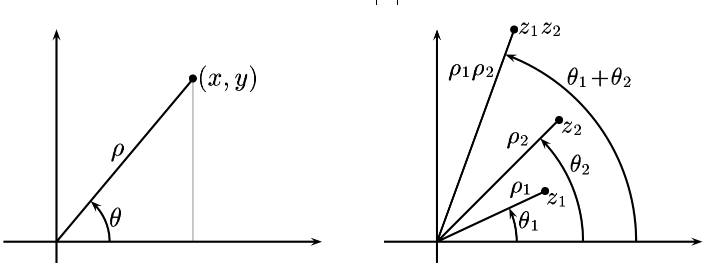
$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5-7i}{-10i} = \frac{1}{10}(7+5i)\,,$$

$$z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9-i}{-10i} = 1-9i\,.$$

Dado $z=(x,y)\neq 0$, sus coordenadas *polares* se definen así:

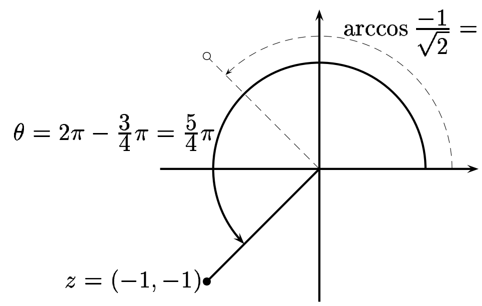
$$\rho = |z| \tag{8}$$

$$\theta = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{|z|}, & \text{si } y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \dfrac{x}{|z|}, & \text{si } y < 0. \end{cases} \tag{9}$$



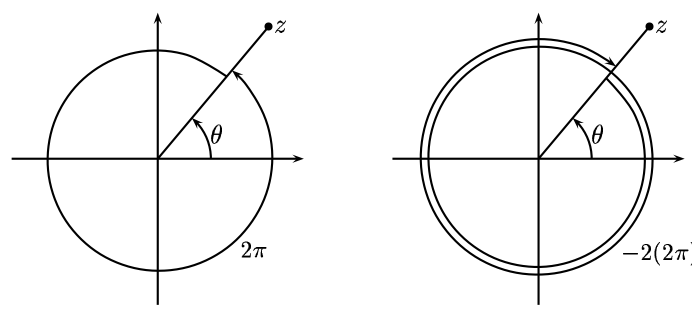
Las coordenadas polares del complejo $z=(x,y)$ son la distancia ρ y el ángulo θ; si las de z_1 son ρ_1 y θ_1 y las de z_2 son ρ_2 y θ_2, entonces las del producto z_1z_2 son $\rho_1\rho_2$ y $\theta_1+\theta_2$.

La fórmula (9) comprende dos casos porque arccos da valores en el intervalo $[0,\pi]$ (es decir, $\arccos : [-1,1]\to[0,\pi]$). Si $z=(x,y)$ es tal que $y\geq 0$ (primer caso), la gráfica de z es un punto que está sobre el eje horizontal o arriba de éste, por lo que le corresponde un ángulo de 0 a π. Pero si $y<0$ (segundo caso), el punto z queda abajo del eje horizontal, por lo que le corresponde un ángulo θ tal que $\pi<\theta<2\pi$, mismo que se calcula como indica la fórmula; en la siguiente figura se ilustra este caso, para $z=(-1,-1)$:



Si $z=(x,y)$ queda en el semiplano inferior, $\arccos(x/|z|)$ da el ángulo del punto simétrico a z respecto al eje horizontal, entonces al sustraer este ángulo a 2π se obtiene el ángulo de z.

Aunque un número z tiene módulo único, no sucede así con su ángulo. La fórmula (9) da el ángulo θ tal que $0\leq\theta<2\pi$, pero todos los de forma $\theta+k(2\pi)$ —con $k\in\mathbb{Z}$— corresponden a z (son los ángulos que se obtienen agregando a θ cualquier número entero de vueltas completas).



Si al ángulo θ dado por (9) se le suma 2π un número entero de veces, se obtiene un ángulo que también corresponde a z. La figura ilustra los casos en que a θ se le suma 2π y $-2(2\pi)$.

Para $z=0$, (8) da $\rho=0$, pero (9) no se puede aplicar. Se conviene que en este caso θ tome cualquier valor.

Las fórmulas para obtener x y y dadas ρ y θ son más simples:

$$x = \rho\cos\theta \tag{10}$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{11}$$

Estas igualdades justifican la siguiente:

$$x+yi = \rho\cos\theta + i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

de la que obtenemos:

$$x+yi = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{12}$$

Al lado derecho de esta ecuación se le conoce como "forma polar" de $x+iy$. Al multiplicar dos números escritos en forma polar se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\quad \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) &= \\ = \rho_1\rho_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) &+ \\ + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)\big) &= \\ = \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2)\big)&\,; \end{aligned}$$

este resultado se puede leer así: "el producto del número de coordenadas polares ρ_1 y θ_1 por el de coordenadas ρ_2 y θ_2 es

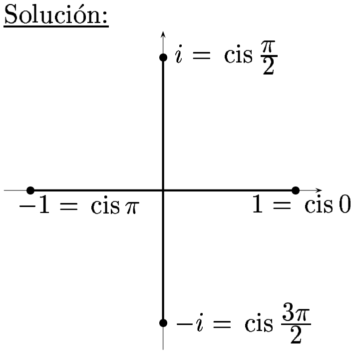
el número de módulo $\rho_1\rho_2$ y ángulo $\theta_1+\theta_2$", lo que justifica la interpretación geométrica dada a la multiplicación.
Se acostumbra abreviar escribiendo $\operatorname{cis}\theta$ en vez de $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, con lo que la fórmula para multiplicar números escritos en forma polar queda así:

$$\rho_1 \operatorname{cis}\theta_1 \quad \rho_2 \operatorname{cis}\theta_2 = \rho_1\rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2) \tag{13}$$

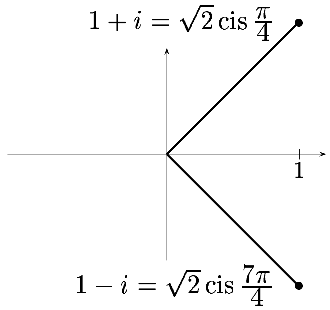
9. Graficar cada número y expresarlo en la forma $\rho\operatorname{cis}\theta$:

a) i **b)** -1 **c)** $-i$ **d)** 1 **e)** $1+i$
f) $1-i$ **g)** $-3i$ **h)** -2 **i)** $\sqrt{3}+i$ **j)** $-1+\sqrt{3}i$

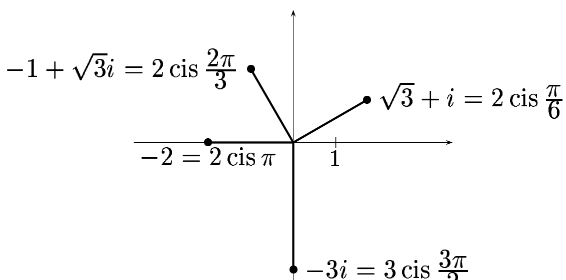
Solución:



a, **b**, **c** y **d**.



e y **f**.



g, **h**, **i** y **j**.

La siguiente es una fórmula en notación polar para obtener el inverso multiplicativo de $\rho\operatorname{cis}\theta$ ($\neq 0$, por supuesto):

$$(\rho\operatorname{cis}\theta)^{-1} = \frac{1}{\rho}\operatorname{cis}(-\theta)\,, \tag{14}$$

que es correcta porque, de acuerdo con (13),

$$\rho\operatorname{cis}\theta \quad \frac{1}{\rho}\operatorname{cis}(-\theta) = \operatorname{cis}0 = \cos 0 + i\operatorname{sen}0 = 1\,.$$

De (14) y (13) se obtiene que

$$\frac{\rho_1\operatorname{cis}\theta_1}{\rho_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)\,.$$

10. Efectuar las operaciones indicadas:

a) $3\operatorname{cis}(\pi/3)\ 2\sqrt{2}\operatorname{cis}(3\pi/4)$ **b)** $5\operatorname{cis}(2\pi/3)\ 4\operatorname{cis}(\pi/3)$
c) $2\operatorname{cis}(5\pi/6)\ 3\operatorname{cis}(\pi/2)$ **d)** $\sqrt{2}\operatorname{cis}(\pi/4)\ \sqrt{3}\operatorname{cis}(5\pi/4)$
e) $\dfrac{2\sqrt{2}\operatorname{cis}(3\pi/4)}{3\operatorname{cis}(\pi/2)}$ **f)** $\dfrac{7\operatorname{cis}(0)}{3\operatorname{cis}(\pi)}$

Solución:

a) $6\sqrt{2}\operatorname{cis}(13\pi/12)$. **b)** $20\operatorname{cis}\pi$.
c) $6\operatorname{cis}(4\pi/3)$. **d)** $\sqrt{6}\operatorname{cis}(3\pi/2)$.
e) $(2\sqrt{2}/3)\operatorname{cis}(\pi/4)$. **f)** $(7/3)\operatorname{cis}(-\pi) = (7/3)\operatorname{cis}(\pi)$.

11. Efectuar las operaciones indicadas, dando el resultado en la forma $\rho\operatorname{cis}\theta$:

a) $(1+i)^3$ **b)** $(\sqrt{3}+i)^6$
c) $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^5$ **d)** $(-1+\sqrt{3}i)^5$

Solución:

a) $(1+i)^3 = \big(\sqrt{2}\operatorname{cis}(\pi/4)\big)^3 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}(3\pi/4)$.

b) $(\sqrt{3}+i)^6 = \big(2\operatorname{cis}(\pi/6)\big)^6 = 64\operatorname{cis}\pi$.

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^5 = \big(2\operatorname{cis}(\pi/4)\big)^5 = 32\operatorname{cis}(5\pi/4)$.

d) $(-1+\sqrt{3}i)^5 = \big(2\operatorname{cis}(\frac{2\pi}{3})\big)^5 = 32\operatorname{cis}(\frac{10\pi}{3}) = 32\operatorname{cis}(\frac{4\pi}{3})$.

Teorema (de De Moivre). Para $n\in\mathbb{N}$, $(\rho\operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n\operatorname{cis}(n\theta)$.
Demostración (por inducción sobre n).

$n=0$) En este caso la ecuación es $(\rho\operatorname{cis}\theta)^0 = \rho^0\operatorname{cis}(0\,\theta)$, cierta porque $(\rho\operatorname{cis}\theta)^0 = 1$ y $\rho^0\operatorname{cis}(0\,\theta) = 1\operatorname{cis}0 = 1$.

$n>0$) Supongamos que vale para n (hipótesis de inducción) y probemos que entonces vale para $n+1$:

$$\begin{aligned}(\rho\operatorname{cis}\theta)^{n+1} &= (\rho\operatorname{cis}\theta)^n\ \ \rho\operatorname{cis}\theta && [\text{por } z^{n+1}=z^n z]\\ &= \rho^n\operatorname{cis}(n\theta)\ \ \rho\operatorname{cis}\theta && [\text{por hipótesis}]\\ &= \rho^{n+1}\operatorname{cis}\big((n+1)\theta\big) && [\text{por (13)}] \quad \square\end{aligned}$$

Este teorema permite probar el siguiente:
Teorema. Sea $\kappa\in\mathbb{C}$, $\kappa\neq 0$, entonces la ecuación

$$z^n = \kappa \tag{15}$$

con $n\in\mathbb{N}^+$, tiene las siguientes n soluciones, en que r y α son las coordenadas polares de κ (es decir, $\kappa = r\operatorname{cis}\alpha$):

$$z_k = r^{1/n}\operatorname{cis}\Big(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big)\,,\quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{16}$$

Demostración. Con $z = \rho\operatorname{cis}\theta$, (15) queda así:

$$(\rho\operatorname{cis}\theta)^n = r\operatorname{cis}\alpha\,,$$

igualdad que, por el Teorema de De Moivre, es equivalente a

$$\rho^n\operatorname{cis}(n\theta) = r\operatorname{cis}\alpha\,;$$

como dos números complejos son iguales si y sólo si sus módulos son iguales y la diferencia de sus ángulos es 2π multiplicado por algún número entero, tenemos que

$$\rho^n = r \qquad \wedge \qquad n\theta = \alpha + m(2\pi)\,,\quad m\in\mathbb{Z}\,;$$

despejando las incógnitas, obtenemos:

$$\rho = r^{1/n} \tag{17}$$

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + m\frac{2\pi}{n}\,,\quad m\in\mathbb{Z}\,. \tag{18}$$

El valor de ρ es único, pero la segunda ecuación da una infinidad de soluciones para θ; sin embargo, éstas corresponden nada más a los n números complejos dados por (16), veamos porqué. Al descomponer m en la forma $m = qn+k$ $(q\in\mathbb{Z}, 0\leq k<n)$ y sustituirla en (18) se obtiene:

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} + q(2\pi)\,,\quad q\in\mathbb{Z},\ 0\leq k<n\,;$$

ahora bien, para cada k, los ángulos que se obtienen para los distintos valores de q corresponden todos al mismo número complejo, por lo que basta elegir sólo un valor de q, digamos $q = 0$, obteniendo así las siguientes n soluciones para θ:

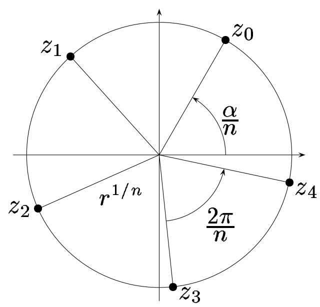
$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\,, \quad 0 \leq k < n\,;$$

usando ésta y (17) se concluye que

$$r^{1/n}\operatorname{cis}\Big(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big)\,, \quad 0 \leq k < n\,,$$

son las n soluciones de (15). □

A las soluciones de (15) se les llama *raíces n-ésimas* de κ. Gráficamente, se encuentran colocadas sobre la circunferencia de radio $r^{1/n}$ centrada en el origen, partiéndola en n arcos iguales (de ángulo $2\pi/n$), como se ilustra en la siguiente figura:



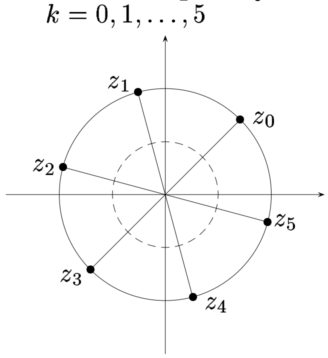
Raíces n-ésimas de un número complejo $\kappa = r\operatorname{cis}\alpha$. La gráfica corresponde a un caso en que $n = 5$.

12. Encuentre y grafique, expresando los resultados en la forma $\rho\operatorname{cis}\theta$:

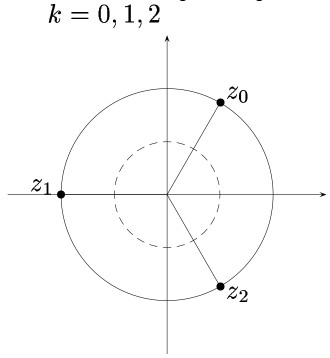
a) Las raíces sextas de $-64i$
b) Las raíces cúbicas de -8
c) Las raíces cuartas de $16 - 16\sqrt{3}i$
d) Las raíces séptimas de $1 - i$

Solución: (En cada figura el círculo interior es de radio 1.)

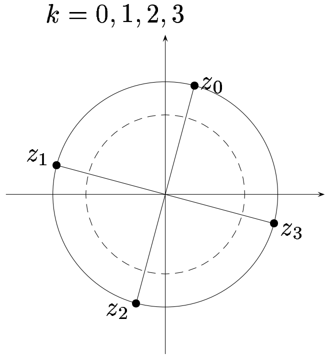
a) $z_k = 2\operatorname{cis}\big(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{6}\big)$, $k = 0, 1, \ldots, 5$



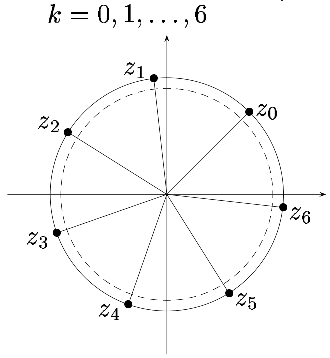
b) $z_k = 2\operatorname{cis}\big(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\big)$, $k = 0, 1, 2$



c) $z_k = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\big(\frac{5\pi}{12} + k\frac{2\pi}{4}\big)$, $k = 0, 1, 2, 3$



d) $z_k = \sqrt[7]{2}\operatorname{cis}\big(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{7}\big)$, $k = 0, 1, \ldots, 6$

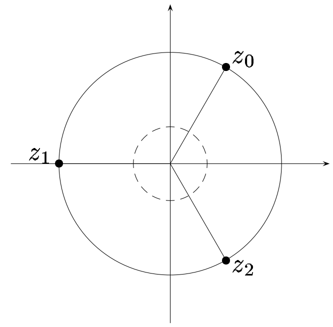


13. Resuelva en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

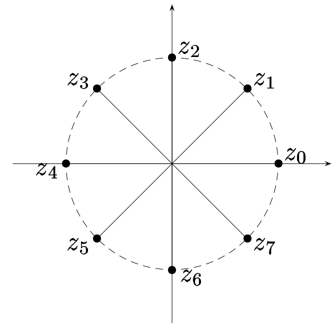
a) $z^3 + 27 = 0$ **b)** $z^8 - 1 = 0$
c) $z^3 + 125i = 0$ **d)** $z^4 - 16i = 0$

Solución: (Este ejercicio es como el anterior, sólo planteado de otra manera.)

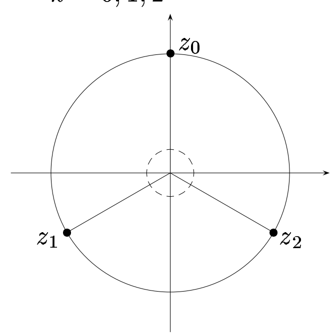
a) $z_k = 3\operatorname{cis}\big(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\big)$, $k = 0, 1, 2$



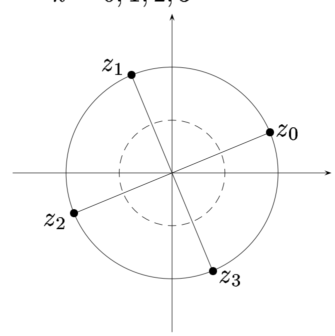
b) $z_k = \operatorname{cis}\big(k\frac{2\pi}{8}\big)$, $k = 0, 1, \ldots, 7$



c) $z_k = 5\operatorname{cis}\big(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}\big)$, $k = 0, 1, 2$



d) $z_k = 2\operatorname{cis}\big(\frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{4}\big)$, $k = 0, 1, 2, 3$



14. Haciendo uso de la definición $e^{i\theta} = \operatorname{cis}\theta$, demostrar las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ **b)** $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

Solución: Recuerde que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$:

a)
$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}(-\theta) \\ &= \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - \big(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)\big) \\ &= \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) \\ &= 2i\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= \operatorname{cis}\theta + \operatorname{cis}(-\theta) \\ &= \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta + (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) \\ &= 2\cos\theta\,. \end{aligned}$$