Curso de Álgebra (2000) – Facultad de Química, UNAM

Ejercicios para la unidad 1 (Lógica matemática y Álgebra de conjuntos)

por Carlos Velarde V.

1. Considere la siguiente fórmula proposicional:

$$A \to B \vee C \leftrightarrow \neg B \wedge \neg C \to A$$

i. Coloque los paréntesis, suponiendo que $\neg$ tiene prioridad sobre $\wedge$, éste sobre $\vee$, éste sobre $\to$ y éste sobre $\leftrightarrow$.

ii. ¿Es tautología la fórmula?

<u>Solución:</u>

i. Primer paso. Colocar paréntesis donde aparezca el operador $\neg$, para determinar las subfórmulas *más chicas* de forma $(\neg\alpha)$:

$$A \to B \vee C \leftrightarrow (\neg B) \wedge (\neg C) \to A$$

Segundo paso. Colocar paréntesis para determinar las subfórmulas $(\alpha \wedge \beta)$ más chicas:

$$A \to B \vee C \leftrightarrow ((\neg B) \wedge (\neg C)) \to A$$

Tercer paso. Proseguir con el operador $\vee$:

$$A \to (B \vee C) \leftrightarrow ((\neg B) \wedge (\neg C)) \to A$$

Cuarto paso. Continuar con el operador $\to$:

$$\big(A \to (B \vee C)\big) \leftrightarrow \big(((\neg B) \wedge (\neg C)) \to A\big)$$

Quinto paso. Continuar con el operador $\leftrightarrow$:

$$\Big(\big(A \to (B \vee C)\big) \leftrightarrow \big(((\neg B) \wedge (\neg C)) \to A\big)\Big)$$

ii. Elaboramos la tabla de verdad para decidir si la fórmula proposicional es una tautología.

A	B	C	$\Big(\big(A\to$	$(B\vee C)\big)$	$\leftrightarrow$	$\big(((\neg B)$	$\wedge$	$(\neg C))$	$\to A\big)\Big)$
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1

En rigor, la tabla de verdad de la fórmula consiste de las tres primeras columnas y de aquella que aparece debajo del operador principal $\leftrightarrow$. (Las otras columnas sirven para la obtención de la tabla de interés, cada una a su vez forma parte de una tabla de verdad: la correspondiente a la subfórmula cuyo operador principal encabeza la columna. En los ejercicios siguientes no escribiremos estas tablas auxiliares.) Puesto que la fórmula dada no es verdadera en todos los casos, no es tautología.

2. Trate las siguientes fórmulas como en el ejercicio anterior:

$$\neg A \to B \vee \neg C \leftrightarrow B \wedge C \to A$$

$$A \wedge B \vee \neg C \to B \leftrightarrow \neg C \to A$$

<u>Solución:</u> Resolvemos por pasos como en el ejercicio anterior:

Primer paso:	$(\neg A) \to B(\neg C \leftrightarrow B \wedge C \to A$
Segundo paso:	$(\neg A) \to B \vee (\neg C) \leftrightarrow (B \wedge C) \to A$
Tercer paso:	$(\neg A) \to (B \vee (\neg C)) \leftrightarrow (B \wedge C) \to A$
Cuarto paso:	$\big((\neg A) \to (B \vee (\neg C))\big) \leftrightarrow \big((B \wedge C) \to A\big)$
Quinto paso:	$\Big(\big((\neg A) \to (B \vee (\neg C))\big) \leftrightarrow \big((B \wedge C) \to A\big)\Big)$

Elaboramos la tabla de verdad para revisar si es una tautología.

A	B	C	$\big((\neg A) \to (B \vee (\neg C))\big) \leftrightarrow \big((B \wedge C) \to A\big)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Puesto que no en todos los casos es verdadera, la fórmula no es tautología. Para la segunda fórmula seguimos la misma metodología:

Primer paso:	$A \wedge B \vee (\neg C) \to B \leftrightarrow (\neg C) \to A$
Segundo paso:	$(A \wedge B) \vee (\neg C) \to B \leftrightarrow (\neg C) \to A$
Tercer paso:	$((A \wedge B) \vee (\neg C)) \to B \leftrightarrow (\neg C) \to A$
Cuarto paso:	$\big(((A \wedge B) \vee (\neg C)) \to B\big) \leftrightarrow \big((\neg C) \to A\big)$
Quinto paso:	$\Big(\big(((A \wedge B) \vee (\neg C)) \to B\big) \leftrightarrow \big((\neg C) \to A\big)\Big)$

Elaboramos la tabla de verdad:

A	B	C	$\big(((A \wedge B) \vee (\neg C)) \to B\big) \leftrightarrow \big((\neg C) \to A\big)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tampoco se trata de una tautología.

3. Decida cuales de las ocho fórmulas siguientes son equivalentes entre sí:

$\neg(P \to Q)$, $\neg P \to \neg Q$, $\neg Q \to \neg P$, $\neg P \to Q$,
$Q \to \neg P$, $Q \to P$, $P \wedge \neg Q$, $Q \wedge \neg P$.

<u>Solución:</u> Se construyen las tablas de verdad para cada una de las fórmulas y se comparan entre sí para advertir cuales son equivalentes, es decir, iguales.

P	Q	$\neg(P \to Q)$	$\neg P \to \neg Q$	$\neg Q \to \neg P$	$\neg P \to Q$
0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1

$Q \to \neg P$	$Q \to P$	$P \wedge \neg Q$	$Q \wedge \neg P$
1	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0
0	1	0	0

Son fórmulas equivalentes $(\neg P \to \neg Q)$ y $(Q \to P)$ y también lo son $\neg(P \to Q)$ y $(P \wedge \neg Q)$.

4. Dar una fórmula proposicional equivalente a

$$(A \vee B) \to (\neg B \leftrightarrow C)$$

en la que no se usen los operadores $\leftrightarrow$, $\to$ ni $\vee$.
<u>Solución:</u> Nos basamos en la aplicación repetida del siguiente resultado de la lógica matemática:
Teorema 1. Sea α una subfórmula de $\mathcal{F}$, $\alpha' \equiv \alpha$ y $\mathcal{F}'$ la fórmula que se obtiene de sustituir α por α' en $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}' \equiv \mathcal{F}$.

Mediante sustituciones de la forma mencionada en el teorema, se trata de obtener una fórmula como la pedida en el planteamiento del problema. Por lo general se busca que las respectivas equivalencias, de la forma $\alpha \equiv \alpha'$, sean simples y se puedan verificar con facilidad usando la metodología ilustrada en el ejercicio anterior. Así, si $\mathcal{F}$ representa la fórmula dada en el problema, la equivalencia

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \equiv \neg(\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$$

nos permite eliminar al operador $\vee$, sustituyendo $(A \vee B)$ por $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ en $\mathcal{F}$, con lo que obtenemos la fórmula $\mathcal{F}'$:

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (\neg B \leftrightarrow C)$$

Ahora, para deshacernos del operador $\leftrightarrow$, podemos recurrir a la equivalencia

$$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \equiv (\alpha_1 \to \alpha_2) \wedge (\alpha_2 \to \alpha_1)$$

para reescribir $\mathcal{F}'$ en la forma siguiente:

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (\neg B \to C) \wedge (C \to \neg B)$$

En esta fórmula se tienen tres ocurrencias del operador $\to$, las que debemos eliminar para lograr el objetivo del ejercicio; para ello recurrimos a tres respectivas aplicaciones de la equivalencia

$$\alpha_1 \to \alpha_2 \equiv \neg(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$$

obteniendo sucesivamente las fórmulas siguientes:

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (\neg B \to C) \wedge \neg(C \wedge \neg\neg B),$$

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(\neg B \wedge \neg C) \wedge \neg(C \wedge \neg\neg B)$$

y por último

$$\neg\Big(\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg\big(\neg(\neg B \wedge \neg C) \wedge \neg(C \wedge \neg\neg B)\big)\Big)$$

fórmula que resuelve el problema.

5. Dar una fórmula proposicional equivalente a

$$(A \wedge B \vee C) \wedge (\neg B \wedge C)$$

en la que no se usen los operadores $\wedge$ y $\vee$.
Solución: Primero conviene colocar un par de paréntesis, de acuerdo al orden de prioridad convenido para los operadores:

$$((A \wedge B) \vee C) \wedge (\neg B \wedge C)$$

Recordamos la equivalencia básica que nos relaciona al operador $\vee$ con los operadores $\to$ y $\neg$:

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \equiv \neg\alpha_1 \to \alpha_2$$

y la usamos para quitar el $\vee$:

$$(\neg(A \wedge B) \to C) \wedge (\neg B \wedge C)$$

Para quitar el operador $\wedge$, tenemos la equivalencia elemental:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \equiv \neg(\alpha_1 \to \neg\alpha_2)$$

la que aplicamos a cada una de las ocurrencias de dicho operador:

$$(\neg(\neg(A \to \neg B) \to C) \wedge (\neg B \wedge C)$$

$$(\neg(\neg(A \to \neg B)) \to C) \wedge \neg(\neg B \to \neg C)$$

$$\neg\big((\neg(\neg(A \to \neg B)) \to C) \to \neg\neg(\neg B \to \neg C)\big)$$

Esta fórmula ya cumple con lo pedido, sin embargo la podemos simplificar un poco recurriendo a la equivalencia $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$:

$$\neg\big(((A \to \neg B) \to C) \to (\neg B \to \neg C)\big)$$

y otro poco usando la equivalencia básica (llamada *contraposición*) $\neg\alpha_1 \to \neg\alpha_2 \equiv \alpha_2 \to \alpha_1$:

$$\neg\big(((A \to \neg B) \to C) \to (C \to B)\big)$$

6. Dar una fórmula proposicional equivalente a

$$\neg A \wedge (B \leftrightarrow C) \vee (B \wedge \neg C)$$

en la que no se usen los operadores $\wedge$, $\leftrightarrow$ ni $\vee$.
Solución: Quite el operador $\leftrightarrow$ como en el problema 4, después quite los operadores $\vee$ e $\wedge$ como en el problema 5, cancele dobles negaciones y obtendrá:

$$\Big(\neg A \to \big((B \to C) \to \neg(C \to B)\big)\Big) \to \neg(B \to C).$$

7. Construya fórmulas proposicionales para las siguientes tablas:

P	Q	R	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

P	Q	R	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

P	Q	R	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Solución: Una forma de resolver este tipo de problemas se apoya en las siguientes propiedades de los operadores $\wedge$ y $\vee$:
Teorema 2. $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ es 1 si y solo si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son 1.
Teorema 3. $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ es 0 si y solo si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son 0.
Consideremos la primera tabla. Por cada 1 de la columna de la derecha, se construye una nueva columna que tenga puros valores 0 salvo en el renglón correspondiente al 1 en cuestión. En nuestro caso se tendrán las tres columnas que aparecen a la derecha en la tabla mostrada enseguida. Por el Teorema 2, las fórmulas que encabezan dichas columnas efectivamente tienen a éstas como tablas de verdad. Por ejemplo, la primera fórmula, $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$, vale 1 sólo en el segundo renglón, porque sólo en ese caso $\neg P$, $\neg Q$ y R valen 1 (en los otros renglones debe valer 0, porque alguna de estas últimas formulas debe valer 0, ya que no hay dos renglones que tengan la misma combinación de valores para P, Q y R).

P	Q	R		¬P ∧¬Q ∧R	¬P ∧Q ∧¬R	P ∧Q ∧¬R
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0

Ahora, por el Teorema 3, tendremos que la disyunción de las fórmulas obtenidas,

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$$

será una fórmula que cumple con lo pedido en el problema.
A la segunda tabla del problema no se le puede aplicar el método arriba ilustrado, porque no tiene renglón algunbo en que valga 1; sin embargo tiene soluciones extremadamente simples, por ejemplo la *contradicción* clásica: $P \wedge \neg P$.
Para la tercera tabla (de una tautología) se puede proceder como con la primera, pero es más simple la solución: $P \vee \neg P$.

8. ¿Es válida la siguiente regla de inferencia?

$$\begin{array}{c} A \to (B \to C) \\ B \wedge \neg C \\ \hline \neg A \end{array}$$

Solución: Tengamos presentes la definición y el teorema siguientes:
Definición 1. Una *regla de inferencia* es una lista de $n+1$ fórmulas:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \,/\, \beta$$

a las primeras n fórmulas se les llama *premisas*, a la última se le llama *conclusión*. La regla de inferencia es *válida* si y solo si en todo caso en que todas las premisas son ciertas la conclusión también es cierta.
Teorema 4 (para la lógica proposicional). La regla de inferencia $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \,/\beta$ es válida si y solo si la fórmula $(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n)\to\beta$ es tautología.

De acuerdo a este teorema, a la regla de inferencia del ejercicio le corresponde la implicación mostrada en la siguiente tabla, donde también se puede apreciar que se trata de una tautología. Entonces, aplicando el teorema, se concluye que dicha regla es válida.

A	B	C	$(A\to(B\to C))\wedge(B\wedge\neg C)\ \to\ \neg A$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Otra manera de resolver el problema consiste en suponer que las premisas son ciertas y entonces mostrar que en ese caso la conclusión debe ser cierta; si esto se logra, por la Definición 1 tendremos que la regla es válida. Este es el método más usado en matemáticas, se le llama *deductivo* y en él se puede recurrir a otras reglas de inferencia válidas, por lo general muy simples. Entre estas reglas tenemos a la conocida como *modus ponens* (MP): $\alpha, \alpha\to\beta \,/\, \beta$ (muestre que es válida). A continuación se presenta, de manera compacta, una *deducción* de que la conclusión $\neg A$ debe ser cierta si se suponen ciertas las premisas:

1.	$B\wedge\neg C$	Segunda premisa (se supone cierta);
2.	$\neg(B\to C)$	Equivalente a 1 (ver ejercicio 3);
3.	$A\to(B\to C)$	Primera premisa (se supone cierta);
4.	$\neg(B\to C)\to\neg A$	Equivalente a 3;
5.	$\neg A$	De 2, 4 y MP.

El uso de una equivalencia para justificar un paso en una deducción (como es el caso en los pasos 2 y 4) puede cambiarse por el uso de una regla de inferencia válida, pues es fácil ver que cada equivalencia $\alpha\equiv\alpha'$ da lugar a dos reglas de inferencia válidas: α/α' y α'/α.

9. ¿Es válida la siguiente regla de inferencia?

$$\begin{array}{c} (P\to Q)\wedge\neg P\wedge(Q\vee P) \\ Q\to P \\ \hline Q \end{array}$$

Solución: Usando el método de tablas de verdad, tenemos:

P	Q	$((P\to Q)\wedge\neg P\wedge(Q\vee P))\wedge(Q\to P)\ \to\ Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

lo que muestra que la regla de inferencia es válida.
Para resolver el problema por el método deductivo, notemos que del Teorema 2 se sigue que son válidas las siguientes reglas de inferencia, cualquiera de ellas llamada *eliminación de* $\wedge$ (elim-$\wedge$):

$$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n \,/\, \alpha_k \qquad (k=1,\ldots,n)$$

1.	$(P\to Q)\wedge\neg P\wedge(Q\vee P)$	Primera premisa;
2.	$(Q\vee P)$	Elim-$\wedge$ aplicada a 1;
3.	$\neg P\to Q$	Equivalente a 2;
4.	$\neg P$	Elim-$\wedge$ aplicada a 1;
5.	Q	MP aplicada a 4 y 3.

Observe que la segunda premisa no se necesitó.

10. ¿Es válido el siguiente argumento?

$$\begin{array}{c} \neg P\to\neg Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

Solución: No, lo que se sigue del Teorema 4, al observar que la fórmula de la tabla siguiente no es tautología:

P	Q	$(\neg P\to\neg Q)\wedge P\ \to\ Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Si se permitiera el uso de esta regla inválida, en situaciones correspondientes al tercer renglón, en que P es cierta y Q es falsa, se obtendría una conclusión falsa a partir de premisas ciertas, lo que daría al traste con una de las propiedades más importantes del lenguaje matemático: "A partir de verdades construir sólo verdades".

11. ¿Es válido el siguiente argumento?:
Si me divorcio, entonces si no consigo trabajo pierdo la casa.
No me emborracho o me divorcio.
No consigo trabajo.
Por lo tanto, si me emborracho pierdo la casa.

Solución: Los argumentos se parecen a las reglas de inferencia, constan de una serie de afirmaciones —las premisas— y una afirmación final —la conclusión; el criterio para decidir si un argumento es válido es el mismo que el presentado para las reglas de inferencia en la Definición 1.
Representemos las proposiciones "me divorcio", "consigo trabajo", "pierdo la casa" y "me emborracho" mediante las letras proposicionales D, T, P y E, respectivamente. Ahora podemos escribir el argumento en términos de la lógica proposicional así:

$$\begin{array}{c} D\to(\neg T\to P) \\ \neg E\vee D \\ \neg T \\ \hline E\to P \end{array}$$

Con esto, el argumento ya no se distingue de una regla de inferencia, podemos tratarlo a la manera de los dos ejercicios anteriores; veamos que es válido:

1.	$E\to D$	Equivalente a la 2ª premisa;
2.	$E\to(\neg T\to P)$	$\alpha\to\beta,\beta\to\gamma/\alpha\to\gamma$, aplic. a 1 y 1ª premisa;
3.	$\neg T\to(E\to P)$	Equivalente a 2;
4.	$E\to P$	MP aplicada a la 3ª premisa y 3;

---

12. Escriba una fórmula equivalente a

$$\neg\exists x\big(P(x)\to\neg\forall y(Q(x,y)\wedge\neg P(x))\big)$$

en la que no aparezcan negadas fórmulas compuestas.
Solución: Usando la equivalencia $\neg\exists x\alpha\equiv\forall x\neg\alpha$ obtenemos:

$$\forall x\neg\big(P(x)\to\neg\forall y(Q(x,y)\wedge\neg P(x))\big)$$

Usando ahora $\neg(\alpha_1\to\alpha_2)\equiv(\alpha_1\wedge\neg\alpha_2)$, se llega a:

$$\forall x\big(P(x)\wedge\neg\neg\forall y(Q(x,y)\wedge\neg P(x))\big)$$

Por último, cancelando la doble negación, obtenemos:

$$\forall x\big(P(x)\wedge\forall y(Q(x,y)\wedge\neg P(x))\big)$$

13. Trate las siguiente fórmula como en el ejercicio anterior:

$$\neg\Big(A \rightarrow \Big(B \wedge \exists x\big(C(x) \vee \forall y D(x,y)\big)\Big)\Big)$$

<u>Solución:</u> Usando $\neg(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \equiv (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$ se obtiene:

$$A \wedge \neg\Big(B \wedge \exists x\big(C(x) \vee \forall y D(x,y)\big)\Big)$$

Mediante $\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \equiv (\neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2)$ se tendrá:

$$A \wedge \Big(\neg B \vee \neg\exists x\big(C(x) \vee \forall y D(x,y)\big)\Big)$$

Ahora se aplica $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$:

$$A \wedge \Big(\neg B \vee \forall x\neg\big(C(x) \vee \forall y D(x,y)\big)\Big)$$

Enseguida se aplica $\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) \equiv (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$:

$$A \wedge \Big(\neg B \vee \forall x\big(\neg C(x) \wedge \neg\forall y D(x,y)\big)\Big)$$

Para terminar, por $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$ se llega a:

$$A \wedge \Big(\neg B \vee \forall x\big(\neg C(x) \wedge \exists y\neg D(x,y)\big)\Big)$$

14. Pruebe que es verdadera la fórmula

$$\big(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x P(x)\big) \rightarrow \forall x Q(x)$$

<u>Solución:</u> Supongamos que el antecedente de la implicación es verdadero; debemos mostrar que en ese caso el consecuente también es verdadero, y para esto último debemos mostrar que, para cada x, $Q(x)$ es verdadera.
Consideremos un elemento x cualquiera. Por la suposición hecha, $\forall x P(x)$ y $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ deben ser verdaderas; entonces para cada x deben ser verdaderas $P(x)$ y $(P(x) \rightarrow Q(x))$; en particular, para la x considerada, $P(x)$ y $(P(x) \rightarrow Q(x))$ son verdaderas, de donde se sigue —por modus ponens— que $Q(x)$ debe ser verdadera.
Hemos mostrado que $Q(x)$ es verdadera para cada x, por lo que $\forall x Q(x)$ es verdadera. Por lo tanto, la fórmula dada es verdadera.

15. Pruebe que es verdadera la fórmula

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \big(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)\big)$$

<u>Solución:</u> Se sigue de la equivalencia

$$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

y de la fórmula del ejercicio anterior, con $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ en el papel de α, $\forall x P(x)$ como β y $\forall x Q(x)$ como γ.

Álgebra de conjuntos

En lo que sigue, fijamos un conjunto $\mathcal{U}$ como *universo de discurso*, todos los demás conjuntos que se presenten estarán formados por elementos de $\mathcal{U}$. Además, el dominio de las variables que ocurran será $\mathcal{U}$, de aquí que predicados de la forma $x \in C$ solo tendrán sentido para elementos x de $\mathcal{U}$.
Las operaciones básicas sobre conjuntos se definen así:

Complemento de S:	$\overline{S} = \{x : \neg x \in S\}$
Intersección de S y T:	$S \cap T = \{x : x \in S \wedge x \in T\}$
Unión de S y T:	$S \cup T = \{x : x \in S \vee x \in T\}$
Diferencia de S y T:	$S - T = \{x : x \in S \wedge \neg x \in T\}$

De estas definiciones se obtienen de inmediato las respectivas bicondicionales siguientes:

$$x \in \overline{S} \quad \leftrightarrow \quad \neg x \in S \tag{1}$$
$$x \in (S \cap T) \quad \leftrightarrow \quad (x \in S \wedge x \in T) \tag{2}$$
$$x \in (S \cup T) \quad \leftrightarrow \quad (x \in S \vee x \in T) \tag{3}$$
$$x \in (S - T) \quad \leftrightarrow \quad (x \in S \wedge \neg x \in T) \tag{4}$$

Dado que se convino que el dominio de la variable x es $\mathcal{U}$ (ver párrafo inicial), el predicado $x \in \mathcal{U}$ sólo queda definido para los elementos de tal dominio, mismos para los que dicho predicado es verdadero, es decir,

$$x \in \mathcal{U} \leftrightarrow 1 \tag{5}$$

Además, como el conjunto vacío no tiene elementos, $x \in \emptyset$ es falsa para cada x, es decir,

$$x \in \emptyset \leftrightarrow 0 \tag{6}$$

Las relaciones de inclusión e igualdad entre conjuntos se definen así:

$$S \subseteq T \quad \leftrightarrow \quad \forall x(x \in S \rightarrow x \in T) \tag{7}$$
$$S = T \quad \leftrightarrow \quad \forall x(x \in S \leftrightarrow x \in T) \tag{8}$$

16. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$$

<u>Solución:</u> Usando (8), esta igualdad se puede reescribir en la forma equivalente:

$$\forall x\big(x \in \overline{P \cap Q} \leftrightarrow x \in (\overline{P} \cup \overline{Q})\big)$$

Como se trata de una cuantificación universal, será cierta si para cada x es cierta

$$x \in \overline{P \cap Q} \leftrightarrow x \in (\overline{P} \cup \overline{Q})$$

Probemos que esta fórmula es verdadera para cada x. Usando (1) en el lado izquierdo de la bicondicional, y (3) en el lado derecho, obtenemos la fórmula equivalente:

$$\neg x \in (P \cap Q) \leftrightarrow (x \in \overline{P} \vee x \in \overline{Q})$$

Usando ahora (2) en el lado izquierdo y (1) en el lado derecho, llegamos a:

$$\neg(x \in P \wedge x \in Q) \leftrightarrow (\neg x \in P \vee \neg x \in Q)$$

Con esto hemos transformado la bicondicional original en una fórmula equivalente, en la que no aparecen los operadores entre conjuntos, sólo tiene operadores lógicos proposicionales y los predicados simples (o *atómicos*) $x \in P$ y $x \in Q$. Entonces podemos construir la siguiente tabla de verdad:

$x \in P$	$x \in Q$	$\neg(x \in P \wedge x \in Q) \leftrightarrow (\neg x \in P \vee \neg x \in Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vemos que se trata de una tautología. Por lo tanto la bicondicional original es verdadera para cada x, de donde se sigue que la igualdad considerada es cierta.
Nota. Comparando la igualdad original con la fórmula de la tabla, nos damos cuenta que esta fórmula se puede construir directamente de la igualdad mediante el siguiente procedimiento: En lugar de P escribir $x \in P$ y en lugar de Q escribir $x \in Q$, en vez del símbolo $=$ escribir el símbolo $\leftrightarrow$, en vez de $\cap$ escribir $\wedge$, en vez de $\cup$ escribir $\vee$ y en vez de la operación de complementación escribir $\neg$. Aunque la fórmula obtenida es un predicado (en la variable x), es cierta para toda x gracias a que tiene estructura de tautología. Esta estructura se puede resaltar si representamos los predicados $x \in P$ y $x \in Q$ mediante los símbolos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, respectivamente, con lo que la fórmula se vería así:

$$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \leftrightarrow (\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q})$$

fácilmente reconocible como una de las leyes de De Morgan.

17. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$$

<u>Solución:</u> Mediante pasos similares a los dados en el ejercicio anterior (o mejor aún, siguiendo el procedimiento dado en la nota a dicho ejercicio), la presente igualdad da lugar a la fórmula:

$$\big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})\big) \leftrightarrow \big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})\big)$$

la que es tautología, como se muestra en la siguiente tabla:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})\big) \leftrightarrow \big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})\big)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

18. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$P \cap (Q - P) = \emptyset$$

Solución: El propósito de este ejercicio es ilustrar el uso de las equivalencias (4) y (6). En este caso tenemos que probar que para cada x es cierta la bicondicional

$$x \in (P \cap (Q - P)) \leftrightarrow x \in \emptyset$$

Por (1), esta fórmula es equivalente a

$$(x \in P \wedge x \in (Q - P) \leftrightarrow x \in \emptyset$$

y ésta, por (4), es equivalente a

$$(x \in P \wedge (x \in Q \wedge \neg x \in P)) \leftrightarrow x \in \emptyset$$

Por (6), en lugar del predicado $x \in \emptyset$ podemos escribir 0; si además, como hicimos en los ejercicios anteriores, abreviamos escribiendo $\mathcal{P}$ en vez de $x \in P$ y $\mathcal{Q}$ en vez de $x \in Q$, la fórmula se verá así:

$$(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \neg \mathcal{P})) \leftrightarrow 0$$

La tabla correspondiente (enfatizando en ella que el lado derecho de la bicondicional vale 0 en todos los renglones) es la siguiente:

$x \in P$	$x \in Q$	$(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \neg \mathcal{P})) \leftrightarrow 0$
0	0	1 0
0	1	1 0
1	0	1 0
1	1	1 0

Nota. Extendiendo el procedimiento presentado en la nota del ejercicio 16, para pasar directamente de la igualdad original a la fórmula de la tabla, una diferencia de conjuntos, $(S - T)$, debe transformarse en una conjunción de la forma $(\mathcal{S} \wedge \neg \mathcal{T})$; además, cada ocurrencia del conjunto $\emptyset$ se debe reemplazar por el valor de verdad 0. Para completar el procedimiento, adelantemos que cada ocurrencia del conjunto $\mathcal{U}$ (el universo de discurso) se debe reemplazar por el valor de verdad 1, lo que se sigue de la bicondicional (5).

19. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$\emptyset \subseteq P$$

Solución: Las inclusiones entre conjuntos se tratan en forma parecida a las igualdades. Por (7), la fórmula dada es equivalente a

$$\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in P)$$

Procediendo como en los ejercicios anteriores, a esta cuantificación universal le corresponde la siguiente fórmula proposicional, que es tautología:

$$0 \rightarrow \mathcal{P}$$

Obsérvese que el símbolo $\subseteq$ en la fórmula original da lugar al operador lógico $\rightarrow$ en la fórmula proposicional obtenida.

20. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$(P \cup Q) - (P \cap Q) = (P - Q) \cup (Q - P)$$

Solución: A esta igualdad le corresponde la fórmula proposicional

$$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \leftrightarrow (\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \neg \mathcal{P})$$

cuya tabla de verdad se muestra a continuación:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \leftrightarrow (\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \neg \mathcal{P})$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

21. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$A \subseteq B \cap C \ \rightarrow \ A \cap (B - C) = \emptyset$$

Solución: Por (7) y (8), la fórmula es equivalente a

$$\forall x \big(x \in A \rightarrow (x \in B \cap C)\big) \rightarrow \forall x \big(x \in (A \cap (B - C)) \leftrightarrow x \in \emptyset\big)$$

Por la fórmula del ejercicio 15 —con $x \in A \rightarrow (x \in B \cap C)$ como $P(x)$ y $x \in (A \cap (B - C)) \leftrightarrow x \in \emptyset$ en el papel de $Q(x)$— esta implicación será cierta si lo es la siguiente:

$$\forall x \Big(\big(x \in A \rightarrow (x \in B \cap C)\big) \rightarrow \big(x \in (A \cap (B - C)) \leftrightarrow x \in \emptyset\big)\Big)$$

Esta cuantificación universal puede tratarse como aquellas de los ejercicios anteriores, obteniéndose la forma tautológica:

$$\big(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})\big) \rightarrow \big((\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})) \leftrightarrow 0\big)$$

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\big(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})\big) \rightarrow \big((\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})) \leftrightarrow 0\big)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

En problemas de este tipo es muy importante no escatimar los paréntesis, agregando los necesarios para no perder la estructura de las fórmulas. Por ejemplo, en la implicación anterior son indispensables los paréntesis que delimitan al antecedente y al consecuente; si se omitieran aquellos del antecedente, se tendría una fórmula ambigua, pues no se sabría cual de los dos operadores $\rightarrow$ es el principal (tomar a uno u otro como operador principal da lugar a sendas fórmulas no necesariamente equivalentes, dado que el operador $\rightarrow$ no es asociativo); por otro lado, si se omitieran los paréntesis que delimitan al consecuente, de acuerdo a las reglas de precedencia (ver ejercicio 1), se tendría una fórmula cuyo operador principal es el $\leftrightarrow$ que aparece hacia el final, misma que no es equivalente a la fórmula correcta (confírmelo).

22. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$P \subseteq (Q - R) \rightarrow P \cap R = \emptyset$$

Solución: Procediendo como en el ejercicio anterior, esta implicación es cierta porque la siguiente fórmula es tautología:

$$\big(\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{Q} \wedge \neg \mathcal{R})\big) \rightarrow \big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \leftrightarrow 0\big)$$

23. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$P \cup Q \subseteq (P - Q) \cup (Q - P) \rightarrow P \cap Q = \emptyset$$

Solución: Es cierta porque la siguiente fórmula es tautología:

$$\big((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \rightarrow (\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \neg \mathcal{P})\big) \rightarrow \big(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \leftrightarrow 0\big)$$

24. Mediante el método de tablas de verdad pruebe que es cierta

$$(P \cap \overline{Q}) \cup (\overline{P} \cap Q) = P \cup Q \rightarrow \overline{P} \cup \overline{Q} = \mathcal{U}$$

Solución: Es cierta porque la siguiente fórmula es tautología:

$$\big((\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \vee (\neg\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \leftrightarrow \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}\big) \rightarrow \big(\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q} = 1\big)$$

El método mas usado para demostrar inclusiones entre conjuntos, por ejemplo la inclusión $A \subseteq B$, consiste en considerar un elemento arbitrario x y a partir de la suposición $x \in A$ intentar deducir $x \in B$. Si se logra esta deducción, se tendrá que $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ y entonces, por (7), $A \subseteq B$. En la solución al siguiente problema se ilustra este método.

25. Demostrar $P \cap Q \subseteq \overline{P - Q}$.
Solución:

1.	$x \in P \cap Q$	Suposición;
2.	$x \in P \wedge x \in Q$	De 1 y fórmula (2);
3.	$x \in Q$	De 2, aplicándole $\alpha\wedge\beta/\beta$;
4.	$\neg x \in P \vee x \in Q$	De 3, aplicándole $\beta/\alpha\vee\beta$;
5.	$\neg(x \in P \wedge \neg x \in Q)$	De 4, porque $\neg\alpha \vee \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$;
6.	$\neg(x \in (P - Q))$	De 5 y (4);
7.	$x \in \overline{P - Q}$	De 6 y (1).

Gracias al siguiente teorema, las igualdades entre conjuntos, por ejemplo $A = B$, se pueden demostrar probando por separado las inclusiones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Teorema 5. $A = B \;\leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

Prueba. Tengamos presente la siguiente bicondicional, cierta para cualesquiera predicados $P(x)$ y $Q(x)$ (confírmelo, procediendo a la manera del ejercicio 14):

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \;\leftrightarrow\; \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \tag{9}$$

Usando (7) y (8), la fórmula del teorema se puede escribir de la siguiente manera:

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \;\leftrightarrow\; \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

A su vez, esta fórmula es equivalente a la siguiente, pues sabemos que $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$:

$$\forall x\big((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)\big) \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A),$$

que no es sino un caso particular de (9), con $(x \in A \rightarrow x \in B)$ en el papel de $P(x)$ y $(x \in B \rightarrow x \in A)$ como $Q(x)$. □

A su vez, las inclusiones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ se pueden probar por el método usado en el ejercicio anterior. Siguiendo este camino, a continuación presentamos una demostración de la igualdad del ejercicio 16.

26. Demostrar $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$.
Solución:

$\subseteq$) Prueba de $\overline{P \cap Q} \subseteq \overline{P} \cup \overline{Q}$:

1.	$x \in \overline{P \cap Q}$	Suposición;
2.	$\neg x \in (P \cap Q)$	De 1 y fórmula (1);
3.	$\neg(x \in P \wedge x \in Q)$	De 2 y (2);
4.	$\neg x \in P \vee \neg x \in Q$	De 3 y $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$;
5.	$x \in \overline{P} \vee x \in \overline{Q}$	De 4 y (1);
6.	$x \in (\overline{P} \cup \overline{Q})$	De 5 y (3).

$\supseteq$) Prueba de $\overline{P} \cup \overline{Q} \subseteq \overline{P \cap Q}$:

1.	$x \in (\overline{P} \cup \overline{Q})$	Suposición;
2.	$x \in \overline{P} \vee x \in \overline{Q}$	De 1 y (3);
3.	$\neg x \in P \vee \neg x \in Q$	De 2 y (1);
4.	$\neg(x \in P \wedge x \in Q)$	De 3 y $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$;
5.	$\neg x \in (P \cap Q)$	De 4 y (2);
6.	$x \in \overline{P \cap Q}$	De 5 y (1).

Las igualdades entre conjuntos también se pueden demostrar recurriendo a otras ya probadas, procediendo de manera similar a la que aprendemos en secundaria para probar igualdades entre expresiones algebraicas que denotan números, por ejemplo cuando se prueba que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ escribiendo $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$. En el ejercicio siguiente se ilustra este método.

27. Demostrar

$$(P \cup Q) - (P \cap Q) = (P - Q) \cup (Q - P)$$

usando las igualdades siguientes, indicando en cada paso cómo utiliza la igualdad que lo justifica (es decir, precisando los conjuntos que juegan el papel de R, S y T en cada aplicación de la igualdad del caso).

i. $R \cup \emptyset = R$	**v.** $R - S = R \cap \overline{S}$
ii. $\overline{R} \cap R = \emptyset$	**vi.** $\overline{R \cap S} = \overline{R} \cup \overline{S}$
iii. $R \cap S = S \cap R$	**vii.** $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$
iv. $R \cup S = S \cup R$	

Solución: (En cada paso sólo se indica la igualdad que lo justifica, complete la respuesta identificando los conjuntos que fungen como R, S y T.)

$$\begin{aligned}
(P \cup Q) - (P \cap Q) &\overset{\text{(v)}}{=} (P \cup Q) \cap \overline{(P \cap Q)} \\
&\overset{\text{(vi)}}{=} (P \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q}) \\
&\overset{\text{(vii)}}{=} \big((P \cup Q) \cap \overline{P}\big) \cup \big((P \cup Q) \cap \overline{Q}\big) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \big(\overline{P} \cap (P \cup Q)\big) \cup \big(\overline{Q} \cap (P \cup Q)\big) \\
&\overset{\text{(vii)}}{=} \big((\overline{P} \cap P) \cup (\overline{P} \cap Q)\big) \\
&\qquad \cup \big((\overline{Q} \cap P) \cup (\overline{Q} \cap Q)\big) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \big(\emptyset \cup (\overline{P} \cap Q)\big) \cup \big((\overline{Q} \cap P) \cup \emptyset\big) \\
&\overset{\text{(iv)}}{=} \big((\overline{P} \cap Q) \cup \emptyset\big) \cup \big((\overline{Q} \cap P) \cup \emptyset\big) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} (\overline{P} \cap Q) \cup (\overline{Q} \cap P) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} (Q \cap \overline{P}) \cup (P \cap \overline{Q}) \\
&\overset{\text{(v)}}{=} (Q - P) \cup (P - Q) \\
&\overset{\text{(iv)}}{=} (P - Q) \cup (Q - P)
\end{aligned}$$
