Ejemplos de métodos de demostración

por Carlos Velarde V.

Teorema 1. Sea n un número natural.

$$n \text{ es par} \leftrightarrow n^2 \text{ es par}.$$

Demostración. Para demostrar una bicondicional $(\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$ se puede proceder probando por separado $(\alpha_1 \to \alpha_2)$ y $(\alpha_2 \to \alpha_1)$. La justificación de este método es la siguiente: De las dos implicaciones, usando la regla $\beta_1, \beta_2/\beta_1 \wedge \beta_2$ se obtendrá $(\alpha_1 \to \alpha_2) \wedge (\alpha_2 \to \alpha_1)$, conjunción que sabemos es equivalente a $(\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$.

$\to$) Prueba de: n es par $\to n^2$ es par.

Supongamos que n es par, o se que

$$n = 2p.$$

De esta igualdad obtenemos:

$$n^2 = (2p)^2 = 2(2p^2),$$

de donde se sigue que n^2 es par.

$\leftarrow$) Prueba de: n^2 es par $\to n$ es par.

Esta implicación la demostraremos "por contraposición"; para probar por este método una implicación $\alpha \to \beta$, lo que se hace es demostrar $\neg\beta \to \neg\alpha$ (la "contrapuesta" de $\alpha \to \beta$) y entonces, gracias a la equivalencia $\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$, se tendrá que $\alpha \to \beta$.

En el presente caso, la contrapuesta es:

$$n \text{ es impar} \to n^2 \text{ es impar}$$

y una prueba de ella es la siguiente:

Supongamos que n es impar, o sea que

$$n = 2q + 1.$$

De esta igualdad obtenemos:

$$n^2 = (2q+1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1,$$

de donde se sigue que n^2 es impar. □

Teorema 2. $\sqrt{2}$ no es número fraccionario.

Demostración (por reducción al absurdo).

Supongamos lo contrario, o sea:

$$\sqrt{2} \text{ es número fraccionario.} \tag{1}$$

Esto quiere decir que hay números enteros a y b tales que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}. \tag{2}$$

Además, a y b se pueden escoger de tal suerte que

$$a \text{ y } b \text{ no tienen factor común.} \tag{3}$$

De (2) se obtiene:

$$a^2 = 2b^2, \tag{4}$$

igualdad que muestra a a^2 como número par, de donde se sigue —por el Teorema 1— que a también es número par, o sea que se puede escribir en la forma

$$a = 2c, \tag{5}$$

en que c es un número entero. Esta igualdad nos permite sustituir a por $2c$ en la ecuación (4), para obtener

$$(2c)^2 = 2b^2.$$

Simplificando esta ecuación, se obtiene la siguiente:

$$b^2 = 2c^2,$$

y de ésta, procediendo como se hizo a partir de (4), se obtiene que b es número par, es decir,

$$b = 2d, \tag{6}$$

en que d es un número entero. De (5) y (6) se sigue que

$$a \text{ y } b \text{ tienen factor común.} \tag{7}$$

Ahora, de (7) y (3) obtenemos que

$$a \text{ y } b \text{ tienen y no tienen factor común,} \tag{8}$$

lo cual es absurdo. Como cada paso de la deducción es correcto, el absurdo se origina en la suposición inicial, por lo que ésta no puede ser verdadera. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es número fraccionario. □

Para convencernos que el método de "reducción al absurdo" es correcto, analicemos la estructura de la demostración. Para ello, representemos mediante A a la afirmación (1) y mediante B a la afirmación (7). Ahora bien, partiendo de (1) se llegó a (8), lo que garantiza (por el Teorema de la Deducción) que $A \to (B \wedge \neg B)$. Aplicando a esta implicación la regla de inferencia $A \to (B \wedge \neg B)/\neg A$ se obtendrá $\neg A$, fórmula que corresponde al enunciado del teorema.