Curso de Álgebra (2000) – Facultad de Química, UNAM

Ejercicios para la unidad 5 (Espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$)

por Carlos Velarde V.

En los primeros tres ejercicios, averigüe si los vectores dados son linealmente independientes, dé la dimensión del espacio generado por dichos vectores y dé una base de éste.

Definición 1. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es *linealmente independiente* si y solo si la ecuación

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots +, \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

tiene solución única (la trivial: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$).

Definición 2. Sean $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k] = \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k : \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}\,;$$

se prueba que este conjunto es subespacio vectorial, se le llama *espacio generado* por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ y se dice que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un conjunto de *generadores* de dicho espacio.

Definición 3. Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es linealmente independiente, se dice que es una *base* del espacio generado por él. Se prueba que todas las bases de un mismo subespacio coinciden en el número de elementos, al que se le llama *dimensión* de dicho subespacio.

1. $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, 2, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-4, 0, 2, 1)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1, -1)$.
Solución: En este caso la ecuación (1) es

$$\alpha_1(2, -1, 2, 3) + \alpha_2(-4, 0, 2, 1) + \alpha_3(-1, 1, 1, -1) = (0, 0, 0, 0),$$

misma que es equivalente al siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rrrcl} 2\alpha_1 & -4\alpha_2 & -\alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & +\alpha_2 & -\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Resolvamos este sistema mediante el método matricial presentado en la segunda unidad (obsérvese que las columnas de la matriz de coeficientes son los vectores dados): :

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ -R_2 \\ R_3 + 2R_2 \\ R_4 + 3R_2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 + 4R_4 \\ \\ R_3 - 2R_4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 + 9R_3 \\ R_2 - R_3 \\ -R_3 \\ R_4 + 2R_3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_2 \\ R_4 \\ \\ R_1 \end{array} \end{array}$$

Al considerar el sistema homogéneo correspondiente a esta última matriz, se obtiene la solución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por lo tanto, por la Definición 1, los vectores dados son linealmente independientes. Entonces, por la Definición 3, constituyen una base del espacio que ellos generan y este espacio es de dimensión 3.

2. $\boldsymbol{v}_1 = ((1, -1, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = ((1, 4, -1, -5)$, $\boldsymbol{v}_3 = ((0, 1, 1, 0)$ y $\boldsymbol{v}_4 = ((-1, 0, 1, 1)$.
Solución: En este caso la ecuación (1) es

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 + \alpha_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}\,. \tag{2}$$

Procediendo como en el ejercicio 1, de (2) se obtiene un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

la que mediante operaciones elementales se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

A partir de esta matriz se construye la siguiente ecuación paramétrica, que da en forma explícita las soluciones de (2):

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = t(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

Como la ecuación (2) tiene soluciones distintas a la trivial, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ es linealmente dependiente. Esta dependencia se puede exhibir explícitamente de la siguiente manera:
A cada valor de t distinto de 0 le corresponde una solución particular con $\alpha_4 \neq 0$, por ejemplo, con $t = 3$ se obtiene la solución $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (2, 1, -2, 3)$; sustituyendo los valores de α_1, α_2, α_3 y α_4 en la ecuación (2), se obtiene:

$$2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$

de donde se puede despejar $\boldsymbol{v}_4$:

$$\boldsymbol{v}_4 = -\frac{2}{3}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_3$$

lo que muestra a $\boldsymbol{v}_4$ como combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$, de donde se sigue que $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$.

Ahora veremos que los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ forman una base del espacio que ellos generan. Debemos probar que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es linealmente independiente. Para concluir esto vía la Definición 1, necesitamos mostrar que la ecuación

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

tiene solución única (la trivial). La matriz del sistema de ecuaciones equivalente a 5 es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Al observar que esta matriz es igual a la que se obtiene suprimiendo la cuarta columna de (3), resulta evidente que al aplicar a (6) las mismas operaciones elementales usadas para transformar (3) en (4) se obtendrá

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ es la única solución de (5). Entonces $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es linealmente independiente y por lo tanto es una base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$.

3. $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-4, 4, 5)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (2, 0, 1)$.
<u>Solución:</u>
Construir la matriz cuyas columnas son los vectores dados y reducirla mediante el método de eliminación Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & -2 \\ \boxed{0} & \boxed{-4} & 4 \\ \boxed{0} & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -R_1 \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 + 3R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 + R_2 \\ -\frac{1}{4}R_2 \\ R_3 - \frac{7}{4}R_2 \end{matrix}$$

En esta matriz aparecen enmarcadas las columnas correspondientes a elementos "pivote" (aquellos que fueron seleccionados para los pasos de eliminación). Si quedan columnas fuera de esta clase (como es el caso en este ejercicio), entonces los vectores dados no son linealmente independientes.
De estos vectores, aquellos que en la matriz original aparecen en las posiciones correspondientes a las columnas enmarcadas en la matriz reducida, constituyen una base del espacio generado por los vectores dados. De acuerdo con esto, como las columnas enmarcadas son la 1 y la 2, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ es una base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$.
Otra base puede obtenerse si los elementos pivote se eligen de otra manera, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -14 & \boxed{0} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{0} \\ 3 & 5 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{1} & 2 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & -1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 + \frac{7}{2}R_2 \\ \frac{1}{2}R_2 \\ R_3 - \frac{3}{2}R_2 \end{matrix}$$

Como las columnas correspondientes a los elementos elegidos como pivotes son la 1 y la 3, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$ también es base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$.

En los siguientes tres ejercicios, calcule la distancia entre los dos puntos dados:

4. $(1, -3)$ y $(-2, 2)$.
<u>Solución:</u>

$$|(1, -3) - (-2, 2)| = |(3, -5)| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}\,.$$

5. $(1, 3, -2)$ y $(0, 1, -1)$.
<u>Solución:</u>

$$|(1, 3, -2) - (0, 1, -1)| = |(1, 2, -1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}\,.$$

6. $(2, 0, -1, 1, -1)$ y $(-2, -1, 2, 1, 1)$.
<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned} &|(2, 0, -1, 1, -1) - (-2, -1, 2, 1, 1)| \\ &\quad = |(4, 1, -3, 0, -2)| \\ &\quad = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-3)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{30}\,. \end{aligned}$$

En los siguientes tres ejercicios, calcule el valor del ángulo formado por los vectores dados:

7. $(3, 1)$ y $(-2, 1)$.
<u>Solución:</u>

$$\cos\alpha = \frac{(3, 1) \bullet (-2, 1)}{|(3, 1)|\,|(-2, 1)|} = \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,,$$

entonces

$$\alpha = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi \quad (= 135^\circ).$$

8. $(3, -1, 2)$ y $(2, 3, -1)$.
<u>Solución:</u>

$$\cos\alpha = \frac{(3, -1, 2) \bullet (2, 3, -1)}{|(3, -1, 2)|\,|(2, 3, -1))|} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14}\,,$$

entonces

$$\alpha = \arccos\frac{1}{14} \approx 1.49931 \quad (\approx 85.904^\circ).$$

9. $(-1, 2, 1, -1)$ y $(3, 1, 2, 1)$.
<u>Solución:</u>

$$\cos\alpha = \frac{(-1, 2, 1, -1) \bullet (3, 1, 2, 1)}{|(-1, 2, 1, -1)|\,|(3, 1, 2, 1)|} = 0\,,$$

entonces

$$\alpha = \arccos 0 = \frac{1}{2}\pi \quad (= 90^\circ).$$

En los siguientes dos ejercicios, diga si los puntos dados están alineados:

(Definición: Tres puntos distintos $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ están alineados si $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}$ son linealmente dependientes.)

10. $\boldsymbol{P}=(-1,2)$, $\boldsymbol{Q}=(5,4)$ y $\boldsymbol{R}=(2,3)$.
Solución:
Veamos si $\boldsymbol{Q}$-$\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{R}$-$\boldsymbol{P}$ son l. d. Para ello consideremos la ecuación

$$\alpha_1(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})+\alpha_2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})=\boldsymbol{0}\ ,$$

que para los puntos dados es

$$\alpha_1\big((5,4)-(-1,2)\big)+\alpha_2\big((2,3)-(-1,2)\big)=(0,0)$$

o sea

$$\alpha_1(6,2)+\alpha_2(3,1)=(0,0)\ ;$$

esta ecuación tiene soluciones distintas de la trivial, por ejemplo $\alpha_1=1$ y $\alpha_2=-2$, por lo tanto los puntos dados están alineados.

11. $\boldsymbol{P}=(3,1,2)$, $\boldsymbol{Q}=(-6,-6,-2)$ y $\boldsymbol{R}=(0,-2,1)$.
Solución: Procediendo como en el ejercicio anterior, tenemos que la ecuación

$$\alpha_1\big((-6,-6,-2)-(3,1,2)\big)+\alpha_2\big((0,-2,1)-(3,1,2)\big)=(0,0,0)\ ,$$

o sea

$$\alpha_1(-9,-7,-4)+\alpha_2(-3,-3,-1)=(0,0,0)\ ,$$

equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrcl} -9\alpha_1 & -3\alpha_2 & = & 0\\ -7\alpha_1 & -3\alpha_2 & = & 0\\ -4\alpha_1 & -\alpha_2 & = & 0 \end{array}$$

tiene solución única (la trivial $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$). Por lo tanto $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ no están alineados.

---

12. Dar una ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{P}=(2,-3,1)$ y $\boldsymbol{Q}=(-1,-2,2)$.

(Definición: Una ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por los puntos distintos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ es

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}+t(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})\ ,\quad t\in\mathbb{R}\,.)$$

Solución:

$$\boldsymbol{X}=(2,-3,1)+t\big((-1,-2,2)-(2,-3,1)\big)\ ,$$

o sea

$$\boldsymbol{X}=(2,-3,1)+t(-3,1,1)\ ,\quad (t\in\mathbb{R}).$$

13. Dar una ecuación vectorial paramétrica de la *recta* que pasa por los *puntos* $\boldsymbol{P}=(3,-1,1,-2)$ y $\boldsymbol{Q}=(-2,0,-2,1)$.
Solución:

$$\boldsymbol{X}=(3,-1,1,-2)+t\big((-2,0,-2,1)-(3,-1,1,-2)\big)\ ,$$

o sea

$$\boldsymbol{X}=(3,-1,1,-2)+t(-5,1,-3,3)\ ,\quad (t\in\mathbb{R}).$$

---

14. Dar una ecuación vectorial paramétrica del plano que pasa por los puntos $\boldsymbol{P}=(3,4,-1)$, $\boldsymbol{Q}=(1,0,1)$ y $\boldsymbol{R}=(-2,1,1)$.

(Definición: Una ecuación vectorial paramétrica del plano que pasa por los puntos no alineados $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ es

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}+s(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})+t(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\ ,\quad s,t\in\mathbb{R}\,.)$$

Solución:

$$\boldsymbol{X}=(3,4,-1)+s\big((1,0,1)-(3,4,-1)\big)+t\big((-2,1,1)-(3,4,-1)\big)\ ,$$

o sea

$$\boldsymbol{X}=(3,4,-1)+s(-2,-4,2)+t(-5,-3,2)\ ,\quad (s,t\in\mathbb{R}).$$

15. Dar una ecuación vectorial paramétrica del *plano* que pasa por los *puntos* $\boldsymbol{P}=(1,3,1,-2)$, $\boldsymbol{Q}=(1,0,-2,1)$ y $\boldsymbol{R}=(-2,3,0,-2)$.
Solución:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}=(1,3,1,-2)&+s\big((1,0,-2,1)-(1,3,1,-2)\big)\\ &+t\big((-2,3,0,-2)-(1,3,1,-2)\big)\ ,\end{aligned}$$

o sea

$$\boldsymbol{X}=(1,3,1,-2)+s(0,-3,-3,3)+t(-3,0,-1,0)\ ,\quad (s,t\in\mathbb{R}).$$

---

16. Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $\boldsymbol{P}=(1,-1,2)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{N}=(3,0,-4)$.
Solución:
Dicho plano está formado por los puntos $\boldsymbol{X}=(x,y,z)$ que satisfacen la ecuación

$$(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{P})\bullet\boldsymbol{N}=0$$

misma que se puede escribir en la forma equivalente

$$\boldsymbol{X}\bullet\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{N};$$

sustituyendo en ésta los datos, obtenemos:

$$(x,y,z)\bullet(3,0,-4)=(1,-1,2)\bullet(3,0,-4)\ ,$$

o sea

$$3x-4z=-5\,.$$
