Curso de Álgebra (2000) – Facultad de Química, UNAM

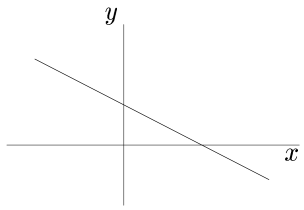
Ejercicios para la unidad 2 (Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes)

por Carlos Velarde V.

En $\mathbb{R}^2$ grafique las ecuaciones siguientes:

1. $3x + 4y = 10$

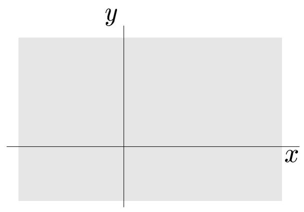
Solución:



Es una recta que corta al eje x en $(10/3, 0)$ y al eje y en $(0, 5/2)$.

2. $0x + 0y = 0$

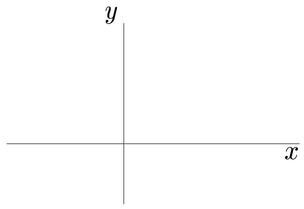
Solución:



Como todo punto (x, y) satisface la ecuación, la gráfica es $\mathbb{R}^2$ completo.

3. $0x + 0y = 2$

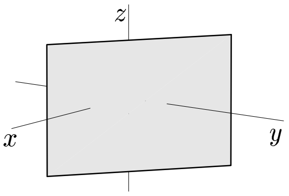
Solución:



Como ningún punto (x, y) satisface la ecuación, la gráfica es el conjunto $\emptyset$ (por lo que no se dibuja ningún punto).

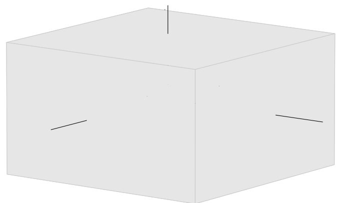
4. Grafique las ecuaciones anteriores en $\mathbb{R}^3$.

Solución: La primera ecuación, como predicado sobre $\mathbb{R}^3$, se puede escribir así: $3x + 4y + 0z = 10$



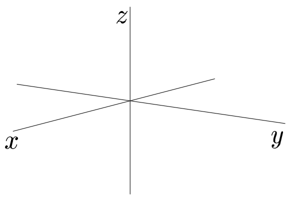
Es una plano paralelo al eje z, que corta al ejes x en $(10/3, 0, 0)$ y al eje y en $(0, 5/2, 0)$; en la figura se muestra un paralelogramo contenido en dicho plano (infinito).

La segunda ecuación es $0x + 0y + 0z = 0$



Como todo punto (x, y, z) satisface la ecuación, la gráfica es todo $\mathbb{R}^3$.

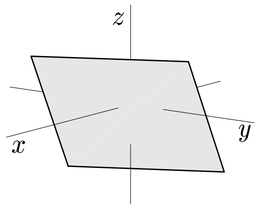
La tercera ecuación es $0x + 0y + 0z = 2$ (equivalente a `FALSO`)



Como ningún punto (x, y, z) satisface la ecuación, la gráfica es el conjunto $\emptyset$.

5. Grafique $2x + y - z = 8$ en $\mathbb{R}^3$.

Solución:



Es una plano que corta a los ejes x, y y z en los puntos $(4, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$ y $(0, 0, -8)$, respectivamente.

6. Demuestre las siguientes equivalencias:

i.

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \wedge \\ &a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \leftrightarrow\; & \\ &a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \wedge \\ &a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \end{aligned}$$

Prueba. Es caso particular de la tautología $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha$. $\square$

ii. Para cada $k \neq 0$,

$$ax + by + cz = d \tag{1}$$

$$\leftrightarrow$$

$$(ka)x + (kb)y + (kc)z = kd \tag{2}$$

Prueba.

$\rightarrow$) Aplicando a (1) la propiedad básica $e_1 = e_2 \rightarrow ke_1 = ke_2$, se obtiene

$$k(ax + by + cz) = kd; \tag{3}$$

de esta ecuación —usando la distributividad de la multiplicación sobre la suma y la asociatividad de la multiplicación— se llega a (2).

$\leftarrow$) Factorizando k en el miembro izquierdo de (2) se obtiene (3); esta ecuación, junto con la hipótesis $k \neq 0$ y la propiedad básica $k \neq 0 \wedge ke_1 = ke_2 \rightarrow e_1 = e_2$, llevan a (1). $\square$

iii.

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \wedge \\ &a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \wedge \\ &(a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_1)y + (c_2 + kc_1)z = d_2 + kd_1 \end{aligned} \tag{5}$$

Prueba. La demostración se apoya en las propiedades básicas $e_1 = e_2 \rightarrow ke_1 = ke_2$ y $e_1 = e_2 \wedge e_1' = e_2' \rightarrow e_1 + e_1' = e_2 + e_2'$.

(En los cursos de secundaria se enseñan estas propiedades diciendo: "se vale multiplicar ambos lados de una ecuación por un mismo número k" y "se vale sumar miembro a miembro dos ecuaciones"; en lo que sigue, nos referiremos a estas operaciones diciendo en forma breve: "multiplicar una ecuación por k" y "sumar dos ecuaciones".)
$\rightarrow$) Sumando a la segunda ecuación la que se obtiene de multiplicar la primera por k, lleva a la siguiente:

$$(a_2x + b_2y + c_2z) + k(a_1x + b_1y + c_1z) = d_2 + kd_1,$$

de ésta, usando propiedades elementales de la suma y la multiplicación, se obtiene (5).
$\leftarrow$) En forma parecida, sumando a (5) la ecuación que se obtiene de multiplicar la primera por $-k$, se llega a (4). $\square$

Estas equivalencias también valen —y se demuestran de la misma manera— para ecuaciones lineales de n variables.

Definición 1. Sea $\mathcal{S}$ un sistema de m ecuaciones lineales de n variables. Las *operaciones elementales* entre ecuaciones del sistema son:

- **i.** Intercambio de dos ecuaciones.
- **ii.** Sustitución de una ecuación por la que se obtiene de multiplicar ambos lados de ella por un número $k \neq 0$.
- **iii.** Sustitución de una ecuación por la que se obtiene de sumarle (miembro a miembro) otra ecuación multiplicada (miembro a miembro) por un número k.

Teorema 1. Al aplicar a $\mathcal{S}$ una operación elemental se obtiene un sistema $\mathcal{S}'$ equivalente al primero (es decir, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ tienen el mismo conjunto de soluciones).

Demostración. El sistema $\mathcal{S}$ es una conjunción de la forma $E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_m$. Por la asociatividad y conmutatividad del operador $\wedge$, usando para cada operación elemental la equivalencia numerada igual en el ejercicio 6 (generalizada a ecuaciones de n variables), en los tres casos se obtiene que $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}$. $\square$

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

7.

$$\begin{array}{rrrcr} -x & +2y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & -z & = & 1 \\ -x & +3y & +2z & = & 2 \end{array}$$

Solución I: Usado las operaciones elementales. Cada nota indica en forma breve la operación elemental usada para obtener la respectiva ecuación; en las notas correspondientes a un sistema, E_1, E_2 y E_3 se refieren a la primera, segunda y tercera ecuación, respectivamente, del sistema que precede al de dichas notas.

$$\begin{array}{rrrcrl} x & -2y & -z & = & -2 & -E_1 \\ 2x & +y & -z & = & 1 & \\ -x & +3y & +2z & = & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcrl} x & -2y & -z & = & -2 & \\ & 5y & +z & = & 5 & E_2 - 2E_1 \\ & y & +z & = & 0 & E_3 + E_1 \end{array}$$

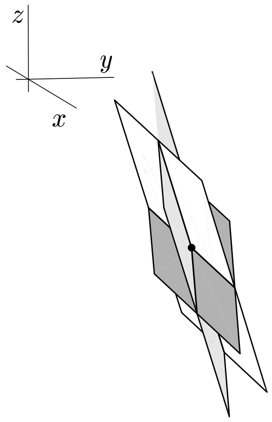
$$\begin{array}{rrrcrl} x & -2y & -z & = & -2 & \\ & y & +\frac{1}{5}z & = & 1 & \frac{1}{5}E_2 \\ & y & +z & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcrl} x & & -\frac{3}{5}z & = & 0 & E_1 + 2E_2 \\ & y & +\frac{1}{5}z & = & 1 & \\ & & \frac{4}{5}z & = & -1 & E_3 - E_2 \end{array}$$

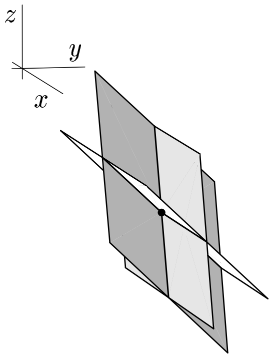
$$\begin{array}{rrrcrl} x & & -\frac{3}{5}z & = & 0 & \\ & y & +\frac{1}{5}z & = & 1 & \\ & & z & = & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4}E_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcrl} x & & & = & -\frac{3}{4} & E_1 + \frac{3}{5}E_3 \\ & y & & = & \frac{5}{4} & E_2 - \frac{1}{5}E_3 \\ & & z & = & -\frac{5}{4} & \end{array}$$

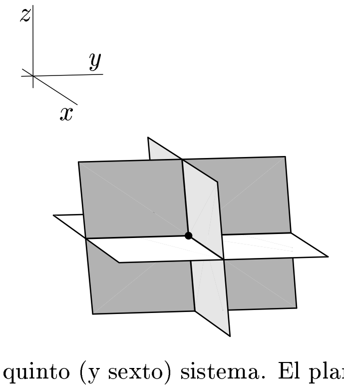
A continuación se presentan gráficas para los sistemas anteriores. La gráfica de cada ecuación es un plano, del que se dibuja un paralelogramo. En cada figura, de los tres paralelogramos el de sombreado oscuro corresponde a la primera ecuación, el de sombreado ligero corresponde a la segunda ecuación y el blanco corresponde a la tercera ecuación. Para un sistema y el que se obtiene de aplicarle la segunda operación elemental la gráfica es común, debido a la equivalencia del ejercicio 6-ii.



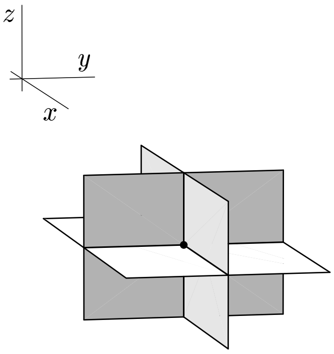
Gráfica para el sistema original (y para el segundo). Se trata de tres planos con sólo un punto en común.



Gráfica para el tercer (y cuarto) sistema. Al aplicar la tercera operación elemental a una ecuación se "mueve" el plano correspondiente a ésta.



Gráfica para el quinto (y sexto) sistema. El plano blanco es perpendicular al eje z.



Gráfica para el último sistema. Se trata de tres planos perpendiculares a los ejes x, y y z, respectivamente.

Solución II: Usando un método matricial. La matriz del sistema de ecuaciones es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Correspondiente a la definición de las operaciones elementales entre ecuaciones de un sistema, tenemos la siguiente:

Definición 2. Sea $\mathcal{M}$ una matriz numérica rectangular. Las *operaciones elementales entre renglones* de la matriz son:

i. Intercambio de dos renglones.

ii. Sustitución de un renglón por el que se obtiene de multiplicarlo por un número $k \neq 0$ (es decir, multiplicar cada componente del renglón por $k \neq 0$).

iii. Sustitución de un renglón por el que se obtiene de sumarle (componente a componente) otro renglón multiplicado por un número k.

Se dice que dos matrices $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ son *equivalentes por renglones* si una de ellas se puede obtener de la otra mediante operaciones elementales entre renglones. No es difícil probar que si se tiene un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz es $\mathcal{M}$ y ésta es equivalente por renglones a $\mathcal{M}'$, entonces el sistema de ecuaciones correspondiente a $\mathcal{M}'$ es equivalente al correspondiente a $\mathcal{M}$. Esto justifica la siguiente manera de resolver sistemas de ecuaciones —ilustrada para el sistema del presente ejercicio— aplicando operaciones elementales entre renglones, partiendo de la matriz del sistema antes presentada. En lo que sigue, cada nota indica la operación elemental usada para obtener el renglón respectivo; en las notas correspondientes a una matriz, R_1, R_2 y R_3 se refieren al primer, segundo y tercer renglón, respectivamente, de la matriz que precede a la adornada con tales notas.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -R_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \frac{5}{4}R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 + \frac{3}{5}R_3 \\ R_2 - \frac{1}{5}R_3 \\ \\ \end{array}$$

El sistema de ecuaciones lineales correspondiente a esta matriz es el mismo que se obtuvo en la Solución I.

8.

$$\begin{array}{rrrcr} -x & +2y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & -z & = & 1 \\ -x & +7y & +2z & = & 2 \end{array}$$

Solución: La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedemos a transformarla mediante operaciones elementales entre renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -R_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

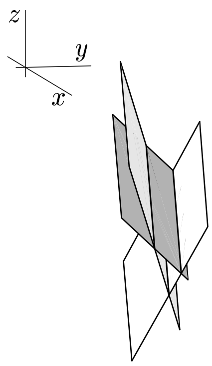
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ \\ R_3 - 5R_2 \end{array}$$

El sistema correspondiente a esta matriz es:

$$\begin{array}{rrrcr} x & & -\frac{3}{5}z & = & 0 \\ & y & +\frac{1}{5}z & = & 1 \\ 0x & +0y & +0z & = & -5 \end{array}$$

La última ecuación, $0 = -5$, es equivalente a `FALSO`, por lo que su conjunto de soluciones es $\emptyset$, de donde se sigue que el conjunto de soluciones del sistema —igual a la intersección de los conjuntos de soluciones correspondientes a las ecuaciones del sistema— es $\emptyset$. (También se dice que el sistema "no tiene soluciones".) El sistema original tiene la siguiente gráfica:



Cada dos planos se intersectan en una recta. Las tres rectas así obtenidas son distintas y paralelas, por lo que no tienen punto en común. De esto se sigue que la intersección de los tres planos es el conjunto $\emptyset$.

9.

$$\begin{array}{rrrcr} -x & +2y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & -z & = & 1 \\ -x & +7y & +2z & = & 7 \end{array}$$

<u>Solución:</u> La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Procedemos a transformarla mediante operaciones elementales entre renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -R_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ \\ R_3 - 5R_2 \end{array}$$

El sistema correspondiente a esta matriz es:

$$\begin{array}{rrrcr} x & & -\frac{3}{5}z & = & 0 \\ & y & +\frac{1}{5}z & = & 1 \\ 0x & +0y & +0z & = & 0 \end{array}$$

La última ecuación, $0 = 0$, es equivalente a `VERDADERO`, por lo que su conjunto de soluciones es $\mathbb{R}^3$, de donde se sigue que el conjunto de soluciones del sistema es igual al del siguiente:

$$\begin{array}{rrrcr} x & & -\frac{3}{5}z & = & 0 \\ & y & +\frac{1}{5}z & = & 1 \end{array}$$

mismo que conviene reescribir así:

$$\begin{array}{rcrr} x & = & & \frac{3}{5}z \\ y & = & 1 & -\frac{1}{5}z \end{array}$$

Soluciones particulares de este sistema se pueden obtener asignando un valor cualquiera a z, por ejemplo $z = 10$, con lo que la primera ecuación nos da $x = 6$ y la segunda da $y = -1$. Sin embargo, en vez de construir soluciones particulares de esta manera, conviene introducir un nuevo símbolo, digamos t, para representar ese valor arbitrario que podemos asignar a z, escribiendo $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$; con esto, sustituyendo z por t en las ecuaciones anteriores, obtenemos las siguientes igualdades, que dan a x, y y z "despejadas" en términos del *parámetro* t:

$$\begin{array}{rcr} x & = & \frac{3}{5}t \\ y & = & 1-\frac{1}{5}t \\ z & = & t \end{array}$$

Usando notación matricial, estas ecuaciones se pueden escribir de manera equivalente así:

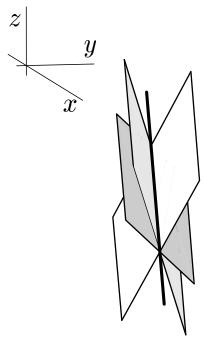
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

y también así:

$$(x \;\; y \;\; z) = (0 \;\; 1 \;\; 0) + t\,(\tfrac{3}{5} \;\; -\tfrac{1}{5} \;\; 1)\,,$$

aunque en vez de esta última para facilitar la lectura se prefiere el uso de la notación vectorial:

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + t\,(\tfrac{3}{5},\ -\tfrac{1}{5},\ 1).$$



Los planos del sistema original se cortan en una recta de ecuación *vectorial paramétrica* $(x, y, z) = (0, 1, 0) + t(\frac{3}{5},\ -\frac{1}{5},\ 1)$. La recta pasa por el punto $P = (0, 1, 0)$ y es paralela al vector $A = (\frac{3}{5},\ -\frac{1}{5},\ 1)$; consta de los puntos X tales que $X = P + tA$.

10.

$$\begin{array}{rrrrcr} 2u & -v & +2x & -y & = & 2 \\ u & +v & +x & -y & = & 1 \end{array}$$

Solución: (En este ejercicio y en los siguientes cinco sólo se presenta la matriz obtenida a partir de la matriz del sistema mediante operaciones elementales, dejando al alumno completar la respuesta.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{array}{rrrrrcr} & v & +2x & & -2z & = & 2 \\ -3u & -3v & +x & +2y & +4z & = & 0 \\ 2u & +2v & -x & +y & +3z & = & -1 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -17 & -39 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 32 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -17 & 3 \end{pmatrix}$$

12.

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & +3y & -z & = & -2 \\ x & -y & -4z & = & 3 \\ & y & -2z & = & 1 \\ -3x & & +z & = & 1 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10/17 \\ 0 & 1 & 0 & -9/17 \\ 0 & 0 & 1 & -13/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{array}{rrrrrcr} 2u & -3v & +4x & -3y & +z & = & 0 \\ u & +2v & +3x & +2y & -z & = & 0 \\ & v & -2x & & +2z & = & 0 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/16 & 39/16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/16 & -17/16 & 0 \end{pmatrix}$$

14.

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x & +3y & -z & +w & = & 3 \\ x & +y & -z & +2w & = & 1 \\ 2x & +2y & & -w & = & 2 \\ 5x & +5y & -z & & = & 1 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15.

$$\begin{array}{rrrrrcr} x & +y & +z & +2u & -w & = & 2 \\ x & +y & -z & +u & +w & = & -1 \\ x & +y & +2z & +2u & -2w & = & 3 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule la inversa de las matrices siguientes:

16.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Mediante operaciones elementales se intenta transformar la matriz $(A\ I)$ de tal manera que la submatriz A se transforme en la matriz I:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{3}R_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \\ -\frac{3}{2}R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & & 2 & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_1 + \frac{2}{3}R_2 \\ \\ R_3 + \frac{5}{3}R_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ 2R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_1 + R_3 \\ R_2 + \frac{1}{2}R_3 \\ \\ \end{array}$$

Puesto que el bloque de la izquierda es I, A es invertible y su inversa se encuentra en el bloque de la derecha, o sea que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

.

17.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Procediendo como en el ejercicio anterior, se obtiene:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que $E = E^{-1}$, o sea que E es la inversa de ella misma.

Usando sólo las propiedades presentadas en clase, sin realizar ninguna expansión por menores, muestre que los determinantes siguientes son iguales a 0.

18. Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \qquad \text{(sumando } R_2 \text{ a } R_4\text{)}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \qquad \text{(factorizando 3 de } R_3 \text{ y 5 de } R_4\text{)}$$

$$= 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \text{(porque } R_3 = R_4\text{)}$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 0 = 0$$

19. Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \qquad \text{(sumando } R_5 \text{ a } R_2\text{)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \qquad \text{(sumando } R_3 \text{ a } R_2\text{)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(porque } R_2 = \mathbf{0}\text{)}$$

Calcule los siguientes determinantes:

20.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: 20.

21.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución: 0.

22.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: 0.