Curso de Álgebra (2000) – Facultad de Química, UNAM

Ejercicios para la unidad 5 (Espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$)

por Carlos Velarde V.

Definición 1 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es *linealmente independiente* (*l.i.*) si y solo si la ecuación

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

tiene solución única (la trivial: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$).

Definición 2 Sean $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k] = \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k : \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}\,;$$

se prueba que este conjunto es subespacio vectorial, se le llama *espacio generado* por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ y se dice que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un conjunto de *generadores* de dicho espacio.

Definición 3 Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es linealmente independiente, se dice que es una *base* de $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k]$.

Teorema 1 Todas las bases de un subespacio V tienen igual número de elementos. (Este núm. define la *dimensión* de V.)

En los ejercicios 1, 2 y 3 averigüe si los vectores dados son linealmente independientes y obtenga la dimensión y una base del espacio generado por dichos vectores.

1. $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, 2, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-4, 0, 2, 1)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1, -1)$.

Solución I: En este caso la ecuación (1) es

$$\alpha_1(2, -1, 2, 3) + \alpha_2(-4, 0, 2, 1) + \alpha_3(-1, 1, 1, -1) = (0, 0, 0, 0),$$

misma que es equivalente al siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rcl} 2\alpha_1 - 4\alpha_2 - \alpha_3 &=& 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 &=& 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &=& 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &=& 0 \end{array}$$

Resolvamos este sistema mediante el método matricial tratado en la segunda unidad (obsérvese que los vectores dados quedan como columnas de la primera matriz y que, por tratarse de un sistema homogéneo, no se agrega la columna de constantes):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ -R_2 \\ R_3 + 2R_2 \\ R_4 + 3R_2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 + 4R_4 \\ \\ R_3 - 2R_4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 + 9R_3 \\ R_2 - R_3 \\ -R_3 \\ R_4 + 2R_3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_2 \\ R_4 \\ \\ R_1 \end{array} \end{array}$$

Del sistema homogéneo correspondiente a esta última matriz se obtiene la solución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por lo tanto, de la Definición 1 se sigue que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es l.i., este conjunto —por la Definición 3— es base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ y, por el Teorema 1, el espacio generado es de dimensión 3.

Solución II: Otra manera de resolver el problema se apoya en los dos teoremas siguientes. Para los conceptos y demostraciones consultar en el libro de H. Gerber: ejemplo 7 en §5.3, definición 1 en §1.2 y teoremas 1 y 2 en §5.4.

Teorema 2 Las operaciones elementales de renglón no alteran el espacio de renglones de una matriz.

Teorema 3 Los renglones no nulos de una forma escalonada por renglones de una matriz A forman una base del espacio de renglones de A.

El método consiste en llevar a forma escalonada por renglones la matriz cuyos renglones son los vectores dados:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_3 \\ R_1 \\ R_2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -R_1 \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 4R_2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{14}R_3 \end{array} \end{array}$$

Entonces, por el Teorema 3, los vectores renglón de la última matriz (los tres son distintos de $\boldsymbol{0}$) forman una base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ y, por los Teoremas 2 y 1, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ es de dimensión tres. Además, el Teorema 1 también implica que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es l.i. —y es otra base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$.

---

2. $\boldsymbol{v}_1 = ((1,-1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = ((1,4,-1,-5)$, $\boldsymbol{v}_3 = ((0,1,1,0)$ y $\boldsymbol{v}_4 = ((-1,0,1,1)$.
Solución I: En este caso la ecuación (1) es

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 + \alpha_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}\,. \tag{2}$$

Procediendo como en la Solución I del ejercicio 1, de (2) se obtiene un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

la que mediante operaciones elementales se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

A partir de esta matriz se construye la siguiente ecuación paramétrica, que da en forma explícita las soluciones de (2):

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = t(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},1),\quad t\in\mathbb{R}$$

Como la ecuación (2) tiene soluciones distintas a la trivial, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\}$ es linealmente dependiente. Esta dependencia se puede exhibir explícitamente de la siguiente manera:
A cada valor de t distinto de 0 le corresponde una solución particular con $\alpha_4 \neq 0$, por ejemplo, con $t = 3$ se obtiene la solución $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (2,1,-2,3)$; sustituyendo los valores de α_1, α_2, α_3 y α_4 en la ecuación (2), se obtiene:

$$2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$

de donde se puede despejar $\boldsymbol{v}_4$:

$$\boldsymbol{v}_4 = -\frac{2}{3}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_3$$

lo que muestra a $\boldsymbol{v}_4$ como combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$, de donde se sigue que $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4] = [\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$.
Ahora veremos que los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ forman una base del espacio que ellos generan. Debemos probar que $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ es linealmente independiente. Para concluir esto vía la Definición 1, necesitamos mostrar que la ecuación

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

tiene solución única (la trivial). La matriz del sistema de ecuaciones equivalente a 5 es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Al observar que esta matriz es igual a la que se obtiene suprimiendo la cuarta columna de (3), resulta evidente que al aplicar a (6) las mismas operaciones elementales usadas para transformar (3) en (4) se obtendrá

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ es la única solución de (5). Entonces $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ es linealmente independiente y por lo tanto es una base de $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$.

Solución II: Procediendo como en la Solución II del ejercicio 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ \\ R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ R_3 \\ R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - 5R_2 \\ R_4 + R_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{6}R_3 \\ R_4 + \frac{1}{3}R_3 \end{array}$$

Entonces, por el Teorema 3, el conjunto de renglones no nulos de esta última matriz, a saber

$$\{(1,-1,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\},$$

es una base de $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4]$. Además, por los Teoremas 2 y 1, $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4]$ es de dimensión 3 y $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\}$ es linealmente dependiente.

---

3. $\boldsymbol{v}_1 = (-1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-4,4,5)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (2,0,1)$.
Solución I (como en la primera solución de los ejercicios anteriores): Primero se construye la matriz cuyas columnas son los vectores dados y se reduce mediante el método de eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & -2 \\ \boxed{0} & \boxed{-4} & 4 \\ \boxed{0} & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -R_1 \\ R_2+2R_1 \\ R_3+3R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1+R_2 \\ -\frac{1}{4}R_2 \\ R_3-\frac{7}{4}R_2 \end{array}$$

En esta matriz aparecen enmarcadas las columnas correspondientes a elementos "pivote" (aquellos que fueron seleccionados para los pasos de eliminación). Si quedan columnas fuera de esta clase (como es el caso en este ejercicio), entonces los vectores dados no son linealmente independientes.
De estos vectores, aquellos que en la matriz original aparecen en las posiciones correspondientes a las columnas enmarcadas en la matriz reducida, constituyen una base del espacio generado por los vectores dados. De acuerdo con esto, como las columnas enmarcadas son la 1 y la 2, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ es una base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$.

Otra base puede obtenerse si los elementos pivote se eligen de manera distinta, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -14 & \boxed{0} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{0} \\ 3 & 5 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1-2R_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{1} & 2 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & -1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1+\frac{7}{2}R_2 \\ \frac{1}{2}R_2 \\ R_3-\frac{3}{2}R_2 \end{array}$$

Como las columnas correspondientes a los elementos elegidos como pivotes son la 1 y la 3, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$ también es base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$.

<u>Solución II:</u> A la manera usada en las soluciones II de los ejercicios anteriores, construir la matriz cuyos renglones son los vectores dados y mediante el método de eliminación pasarla forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -R_1 \\ R_2-4R_1 \\ R_3+2R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{4}R_2 \\ R_3+R_2 \end{array}$$

Entonces $\{(1,-2,-3),(0,1,7/4)\}$ es una base de $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$, este espacio es de dimensión 2 y $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es linealmente dependiente.

Si se deseara exhibir en forma explícita la dependencia lineal entre los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$, se puede proceder de la siguiente manera: Reproducir la transformación anterior, escribiendo los símbolos $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ en lugar de sus respectivos valores:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2-4\boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_3+2\boldsymbol{v}_1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -R_1 \\ R_2-4R_1 \\ R_3+2R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{v}_1 \\ -\frac{1}{4}(\boldsymbol{v}_2-4\boldsymbol{v}_1) \\ (\boldsymbol{v}_3+2\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{v}_2-4\boldsymbol{v}_1) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{4}R_2 \\ R_3+R_2 \end{array}$$

Pero sabemos que el tercer renglón de la última matriz es $\boldsymbol{0}$:

$$(\boldsymbol{v}_3+2\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{v}_2-4\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{0},$$

de donde podemos mostrar a uno de los vectores como combinación lineal de los otros, por ejemplo:

$$\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 .$$

Definición 4 [*tamaño* ó *norma* de $\boldsymbol{x}$]. Sea $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$.

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,.$$

Definición 5 [*distancia* entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$]. Sean $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$.

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\,.$$

En los siguientes tres ejercicios, calcule la distancia entre los dos puntos dados:

4. $(1,-3)$ y $(-2,2)$.
<u>Solución:</u>

$$\|(1,-3)-(-2,2)\| = \|(3,-5)\| = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{34}\,.$$

5. $(1,3,-2)$ y $(0,1,-1)$.
<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned} &\|(1,3,-2)-(0,1,-1)\| \\ &\quad = \|(1,2,-1)\| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6}\,. \end{aligned}$$

6. $(2,0,-1,1,-1)$ y $(-2,-1,2,1,1)$.
<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned} &\|(2,0,-1,1,-1)-(-2,-1,2,1,1)\| \\ &\quad = \|(4,1,-3,0,-2)\| \\ &\quad = \sqrt{4^2+1^2+(-3)^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{30}\,. \end{aligned}$$

Definición 6 [*producto interior*]. Sean $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$.

$$\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n\,.$$

Definición 7 [*ángulo entre* $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$]. Sean $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$.

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \frac{\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}, & \text{si } \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{y};\\ 90^\circ, & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

En los siguientes tres ejercicios, calcule el valor del ángulo formado por los vectores dados:

7. $(3,1)$ y $(-2,1)$.
Solución:

$$\cos\alpha = \frac{(3,1)\bullet(-2,1)}{\|(3,1)\|\,\|(-2,1)\|} = \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,,$$

entonces

$$\alpha = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi \quad (= 135^\circ).$$

8. $(3,-1,2)$ y $(2,3,-1)$.
Solución:

$$\cos\alpha = \frac{(3,-1,2)\bullet(2,3,-1)}{\|(3,-1,2)\|\,\|(2,3,-1))\|} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14}\,,$$

entonces

$$\alpha = \arccos\frac{1}{14} \approx 1.49931 \quad (\approx 85.904^\circ).$$

9. $(-1,2,1,-1)$ y $(3,1,2,1)$.
Solución:

$$\cos\alpha = \frac{(-1,2,1,-1)\bullet(3,1,2,1)}{\|(-1,2,1,-1)\|\,\|(3,1,2,1)\|} = 0\,,$$

entonces

$$\alpha = \arccos 0 = \frac{1}{2}\pi \quad (= 90^\circ).$$

Definición 8 Una ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por los puntos distintos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ de $\mathbb{R}^n$ es

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P} + t(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})\,,\quad t\in\mathbb{R}\,. \tag{7}$$

---

10. Dar una ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{P}=(2,-3,1)$ y $\boldsymbol{Q}=(-1,-2,2)$.
Solución:

$$\boldsymbol{X} = (2,-3,1) + t\big((-1,-2,2)-(2,-3,1)\big)\,,$$

o sea

$$\boldsymbol{X} = (2,-3,1) + t(-3,1,1)\,,\quad (t\in\mathbb{R}).$$

11. Dar una ecuación vectorial paramétrica de la *recta* que pasa por los *puntos* $\boldsymbol{P}=(3,-1,1,-2)$ y $\boldsymbol{Q}=(-2,0,-2,1)$.
Solución:

$$\boldsymbol{X} = (3,-1,1,-2) + t\big((-2,0,-2,1)-(3,-1,1,-2)\big)\,,$$

o sea

$$\boldsymbol{X} = (3,-1,1,-2) + t(-5,1,-3,3)\,,\quad (t\in\mathbb{R}).$$

Se dice que tres puntos distintos $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ son *colineales* si pertenecen a una misma recta. Esto será cierto si y solo si $\boldsymbol{R}$ pertenece a la recta que pasa por $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$, es decir, si y solo si $\boldsymbol{R}$ satisface la ecuación (7), o sea que

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} + k(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})\,,\quad \text{para alguna } k\neq 0$$

($k\neq 0$ porque $\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{P}$). Pero esta ecuación es equivalente a

$$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P} = k(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}),$$

de donde se sigue que

$$\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q} \text{ y } \boldsymbol{R} \text{ son colineales si y solo si } \{\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}\} \text{ es l.d.} \tag{8}$$

En los siguientes dos ejercicios, diga si los puntos son colineales:

12. $\boldsymbol{P}=(-1,2)$, $\boldsymbol{Q}=(5,4)$ y $\boldsymbol{R}=(2,3)$.
Solución:
De acuerdo con (8), veamos si $\boldsymbol{Q}$-$\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{R}$-$\boldsymbol{P}$ son l.d. Para ello consideremos la ecuación

$$\alpha_1(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}) + \alpha_2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{0}\,,$$

que para los puntos dados es

$$\alpha_1\big((5,4)-(-1,2)\big) + \alpha_2\big((2,3)-(-1,2)\big) = (0,0)$$

o sea

$$\alpha_1(6,2) + \alpha_2(3,1) = (0,0)\,;$$

esta ecuación tiene soluciones distintas de la trivial, por ejemplo $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -2$, por lo tanto los puntos dados son colineales.

13. $\boldsymbol{P}=(3,1,2)$, $\boldsymbol{Q}=(-6,-6,-2)$ y $\boldsymbol{R}=(0,-2,1)$.
Solución: Procediendo como en el ejercicio anterior, tenemos que la ecuación

$$\alpha_1\big((-6,-6,-2)-(3,1,2)\big)+\alpha_2\big((0,-2,1)-(3,1,2)\big) = (0,0,0)\,,$$

o sea

$$\alpha_1(-9,-7,-4) + \alpha_2(-3,-3,-1) = (0,0,0)\,,$$

equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrcl} -9\alpha_1 & -3\alpha_2 & = & 0\\ -7\alpha_1 & -3\alpha_2 & = & 0\\ -4\alpha_1 & -\alpha_2 & = & 0\end{array}$$

tiene solución única (la trivial $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$). Por lo tanto $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ no son colineales.

Definición 9 Una ecuación vectorial paramétrica del plano que pasa por los puntos no colineales $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ es

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P} + s(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}) + t(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{P}), \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

---

14. Dar una ecuación vectorial paramétrica del plano que pasa por los puntos $\boldsymbol{P} = (3,4,-1)$, $\boldsymbol{Q} = (1,0,1)$ y $\boldsymbol{R} = (-2,1,1)$.
<u>Solución:</u>

$$\boldsymbol{X} = (3,4,-1) + s\big((1,0,1) - (3,4,-1)\big) + t\big((-2,1,1) - (3,4,-1)\big),$$

o sea

$$\boldsymbol{X} = (3,4,-1) + s(-2,-4,2) + t(-5,-3,2), \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Nota: Para garantizar que efectivamente se trata de un plano, falta verificar que $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ no son colineales, lo que se puede hacer como en los dos ejercicios precedentes. Lo mismo para el siguiente ejercicio.

15. Dar una ecuación vectorial paramétrica del *plano* que pasa por los *puntos* $\boldsymbol{P} = (1,3,1,-2)$, $\boldsymbol{Q} = (1,0,-2,1)$ y $\boldsymbol{R} = (-2,3,0,-2)$.
<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} = (1,3,1,-2) &+ s\big((1,0,-2,1) - (1,3,1,-2)\big)\\ &+ t\big((-2,3,0,-2) - (1,3,1,-2)\big),\end{aligned}$$

o sea

$$\boldsymbol{X} = (1,3,1,-2) + s(0,-3,-3,3) + t(-3,0,-1,0), \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

---

16. Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $\boldsymbol{P} = (1,-1,2)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{N} = (3,0,-4)$.
<u>Solución:</u>
Dicho plano está formado por los puntos $\boldsymbol{X} = (x,y,z)$ que satisfacen la ecuación

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{P}) \bullet \boldsymbol{N} = 0$$

misma que se puede escribir en la forma equivalente

$$\boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{N} = \boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{N};$$

sustituyendo en ésta los datos, obtenemos:

$$(x,y,z) \bullet (3,0,-4) = (1,-1,2) \bullet (3,0,-4),$$

o sea

$$3x - 4z = -5.$$
