Sesión10

Autómatas Finitos No-determinísticos con transiciones-Λ (NFA-Λ)

NFA-Λ

- Motivación & concepto
- Definición
- Cerradura-Λ de un conjunto de estados
- Función de transición aumentada
- Los NFA-Λ son NFA
- Los FA son NFA-Λ

Motivación

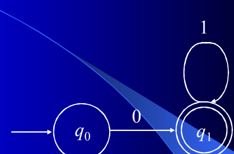
- Si M_1 & M_2 aceptan L_1 & L_2 existen máquinas M_u, M_i & M_d que aceptan:
  - $L(M_u) = L_1 \cup L_2$
  - $L(M_i) = L_1 \cap L_2$
  - $L(M_d) = L_1 - L_2$

Motivación

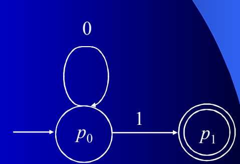
- Pero qué tal las máquinas M_c & M_k de la definición inductiva de las ER?
  - $L(M_u) = L_1 \cup L_2$
  - $L(M_c) = L_1 L_2$
  - $L(M_k) = L_1^*$

Primero: unión & concatenación

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $L_1 = \mathbf{01}^* = \{0\}\{1\}^*$

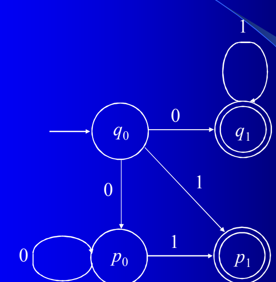


- $L_2 = \mathbf{0}^*\mathbf{1} = \{0\}^*\{1\}$



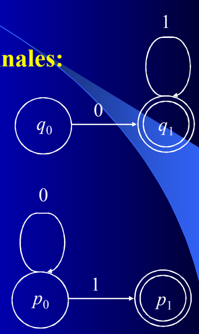
La unión, otra vez...

- $L_1 \cup L_2 = \mathbf{01}^* + \mathbf{0}^*\mathbf{1} = \{0\}\{1\}^* \cup \{0\}^*\{1\}$



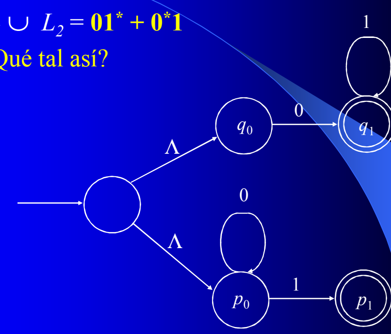
Unión

- $L_1 \cup L_2 = \mathbf{01^* + 0^*1}$
- **Las estructuras originales:**



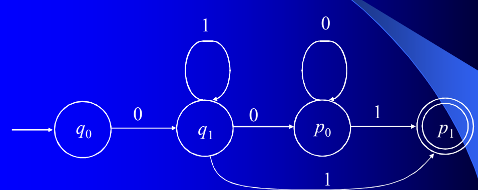
Unión

- $L_1 \cup L_2 = \mathbf{01^* + 0^*1}$
- ¿Qué tal así?



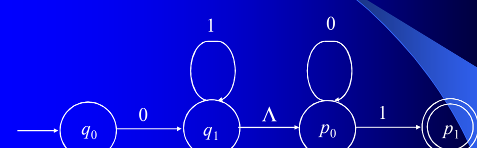
La concatenación

- $L_1L_2 = \mathbf{01^*0^*1}$



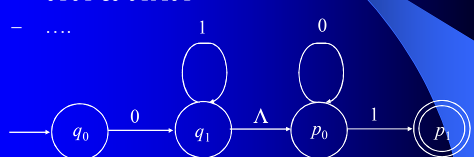
Concatenación

- $L_1L_2 = \mathbf{01^*0^*1}$
- ¿Qué tal así?:



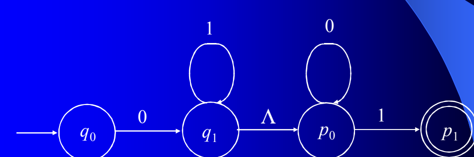
Cadenas correspondientes

- Pero ahora se acepta un conjunto mucho más grande de cadenas (las que incluyen a Λ):
  - 01 & 0Λ1
  - 0101 & 01Λ01
  - ….



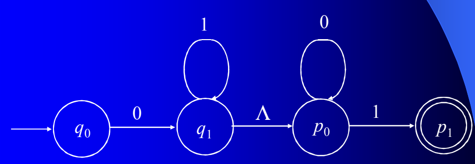
Cadenas correspondientes

- Λ nunca aparece en la cadena de entrada
- Si la máquina está en un estado con una transición-Λ:
  - Puede leer un símbolo de Σ que esté en la cinta
  - Puede moverse (espontáneamente) al estado al que se llega a través de la transición-Λ!



Cadenas correspondientes

- Para toda cadena con transiciones-Λ hay una cadena correspondiente sin transiciones-Λ:
  - 01 corresponde a $0\Lambda1$
  - 0101 corresponde $01\Lambda01$
- La cadena con transiciones-Λ sólo existe en las transiciones del NFA-Λ (en la cinta nunca hay Λ´s)!



NFA-Λ

- Proveen un nivel adicional de expresividad
- Permiten expresar abstracciones (especificaciones) de modo simple y directo!
- Da a los FA la expresivad que tienen las expresiones regulares directamente!

NFA con transiciones-Λ: NFA-Λ

- Un autómata FA no-determinístico con transiciones-Λ (NFA-Λ) es una quinteta:

  $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$,

  donde
  - Q es un conjunto finito (de estados)
  - Σ es una alfabeto
  - $q_0 \in Q$ (el estado inicial)
  - $A \subseteq Q$ (el conjunto de estados aceptores)
  - La función de transición:

    δ: $Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \rightarrow 2^Q$

Funciones de transición

- Función de transición para DFA:

  δ: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$
- Función de transición para NFA:

  δ: $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
- Función de transición para NFA-Λ

  δ: $Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \rightarrow 2^Q$
- Extendemos el codominio con Λ!

Función de transición aumentada para NFA-Λ

- $\delta^*(q, x)$ denota el conjunto de estados a los que llega la máquina a partir del estado q leyendo la cadena x
- Pero ahora la cadena $x \in \Sigma^*$ puede corresponder a muchas cadenas con transiciones-Λ!

Función de transición aumentada para NFA-Λ

- Debemos asegurnos que se llega al conjunto correcto de estados a partir de q con x, independientemente de las transiciones-Λ que haya en la trayectoria de estados de q a $\delta^*(q, x)$
- ¿Cómo podemos incluir esta condición en la definición de δ^* para los NFA-Λ?

Cerradura-Λ de un conjunto de estados

- Cerradura-Λ (de un conjunto de estados): El conjunto de estados al que se llega con transiciones-Λ desde un estado (o conjunto de estados)

Cerradura-Λ de un conjunto de estados

- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ un NFA-Λ, & S un subconjunto de Q. La cerradura-Λ de S es el conjunto $\Lambda(S)$ como sigue:
  - Todo elemento de S pertenece a $\Lambda(S)$
  - Para todo $q \in \Lambda(S)$, todo miembro de $\delta(q, \Lambda)$ está en $\Lambda(S)$
  - Ningún otro miembro de Q está en $\Lambda(S)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

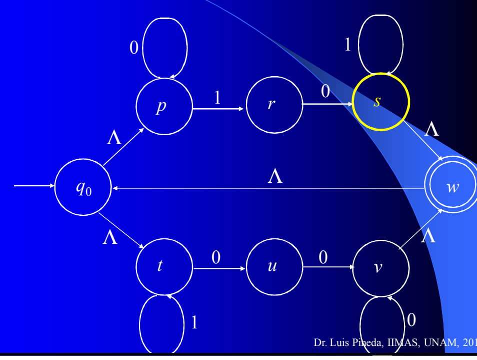
Cálculo de $\Lambda(S)$ para un S dado

- Sea S un conjunto de estados de un NFA-Λ
- Sea $T = S$ donde T es el conjunto $\Lambda(S)$
  - Para todo $q \in T$ incluir en T todo $\delta(q, \Lambda)$ que no esté incluido en T
  - Repetir hasta que no sea posible incluir más estado en T!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cálculo de Λ({s}):

T = $\{s\}$

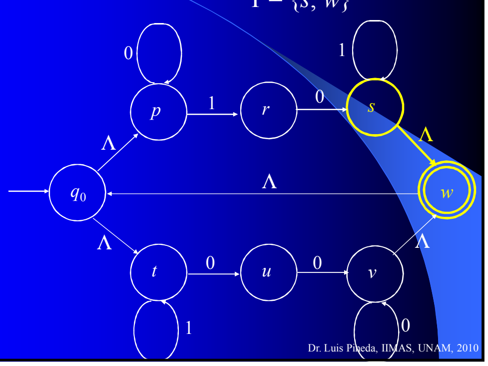


Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cálculo de Λ({s}):

$\delta(s, \Lambda) = \{w\}$

T = $\{s, w\}$

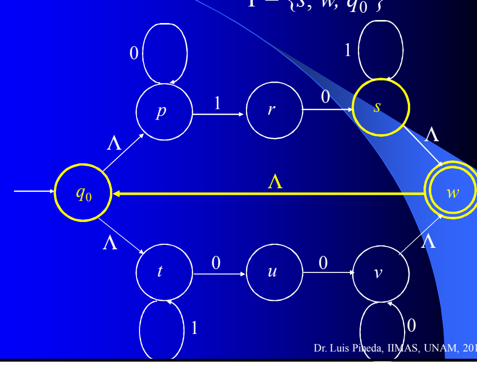


Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cálculo de Λ({s}):

$\delta(w, \Lambda) = \{q_0\}$

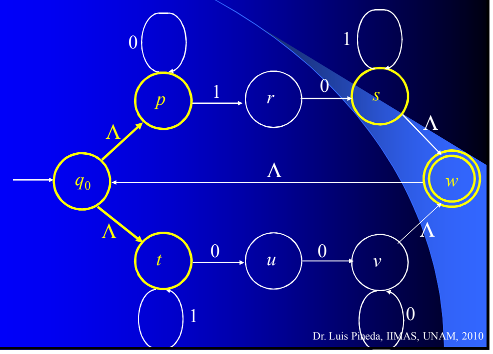
T = $\{s, w, q_0\}$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cálculo de $\Lambda(\{s\})$:

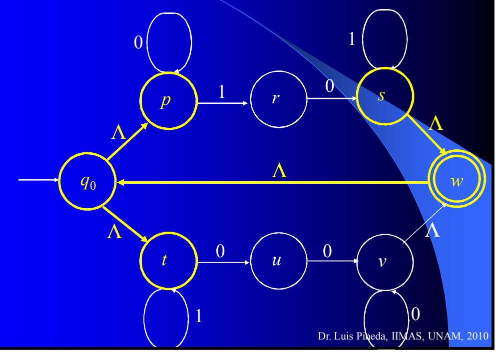
$\delta(q_0, \Lambda) = \{p, t\}$
$T = \{s, w, q_0, p, t\}$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cálculo de $\Lambda(\{s\})$:

$\delta(p, \Lambda) = \delta(t, \Lambda) = \phi$
$T = \{s, w, q_0, p, t\}$



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

δ^* NFA-Λ

- $\Lambda(S)$ calcula la función de transición aumentada para trayectorias iniciadas en el conjunto de estados S que tienen transiciones-Λ!
- Si $\delta^*(q, y)$ es el conjunto de estados que se pueden alcanzar desde q con la cadena y incluyendo transiciones-Λ, entonces el conjunto de estados que se pueden alcanzar leyendo un símbolo adicional a es:

$$\bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r, a)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cerradura-Λ de S

- La cerradura-Λ de

$$\bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r, a)$$

incluye también cualquier otro estado que se pueda alcanzar mediante una o más transiciones-Λ, por lo que:

$$\delta^*(q, ya) = \Lambda\left(\bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r, a) \right)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

δ^* NFA-Λ

- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ un NFA-Λ
- La función de transición aumentada:

$$\delta^*: Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

se define como sigue:

– Para todo $q \in Q$, $\delta^*(q, \Lambda) = \Lambda(\{q\})$.
– Para todo $q \in Q$, $y \in \Sigma^*$ & $a \in \Sigma$:

$$\delta^*(q, ya) = \Lambda\left(\bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r, a) \right)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Lenguaje aceptado por un NFA-Λ

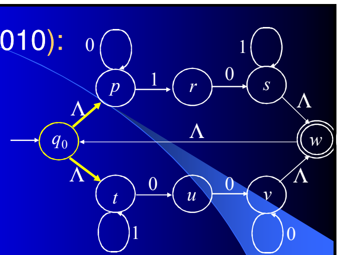
- Una cadena x se acepta por M si

$$\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \varnothing$$

- El lenguaje reconocido por M es el conjunto $\boldsymbol{L}(M)$ de todas las cadenas aceptadas por M

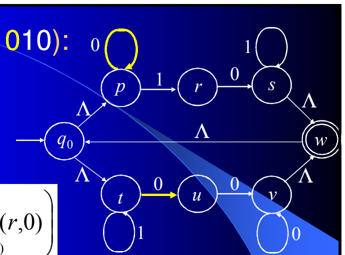
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cálculo de: $\delta^*(q_0, 010)$:



$\delta^*(q_0, \Lambda) = \Lambda(\{q_0\})$
$= \{q_0, p, t\}$

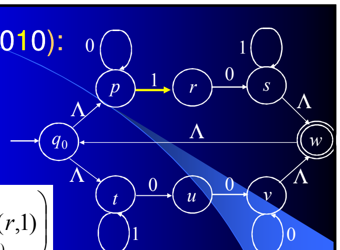
Cálculo de: $\delta^*(q_0, 010)$:



$\delta^*(q_0, \Lambda) = \{q_0, p, t\}$

$\delta^*(q_0, 0) = \Lambda\left(\bigcup_{r\in\delta^*(q_0,\Lambda)} \delta(r,0)\right)$
$= \Lambda(\delta(q_0, 0) \cup \delta(p, 0) \cup \delta(t, 0))$
$= \Lambda(\phi \cup \{p\} \cup \{u\})$
$= \Lambda(\{p, u\})$
$= \{p, u\}$

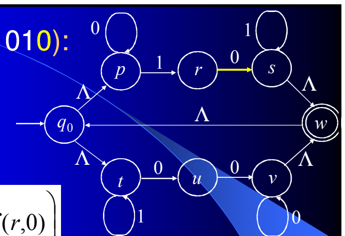
Cálculo de: $\delta^*(q_0, 010)$:



$\delta^*(q_0, 0) = \{p, u\}$

$\delta^*(q_0, 01) = \Lambda\left(\bigcup_{r\in\delta^*(q_0,\Lambda 0)} \delta(r,1)\right)$
$= \Lambda(\delta(p, 1) \cup \delta(u, 1))$
$= \Lambda(\{r\} \cup \phi)$
$= \Lambda(\{r\})$
$= \{r\}$

Cálculo de: $\delta^*(q_0, 010)$:

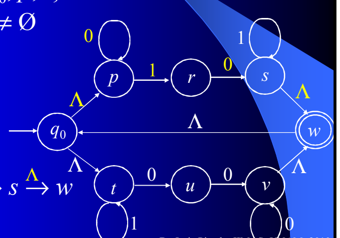


$\delta^*(q_0, 01) = \{r\}$

$\delta^*(q_0, 010) = \Lambda\left(\bigcup_{r\in\delta^*(q_0,\Lambda 01)} \delta(r,0)\right)$
$= \Lambda(\delta(r, 0))$
$= \Lambda(\{s\})$
$= \{s, w, q_0, p, t\}$

El lenguaje aceptado por un NFA-Λ

- Una cadena x se acepta por M si $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$
- $A = \{w\}$
- $\delta^*(q_0, 010) = \{s, w, q_0, p, t\}$
- $\delta^*(q_0, x) \cap A = \{w\} \neq \emptyset$



- Aceptando 010:

$q_0 \xrightarrow{\Lambda} p \xrightarrow{0} p \xrightarrow{1} r \xrightarrow{0} s \xrightarrow{\Lambda} w$

Los NFA-Λ son NFA

- Si $L \subseteq \Sigma^*$ se acepta por el NFA-Λ

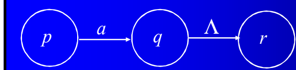
  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

  existe un NFA

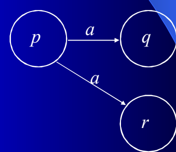
  $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$

  que también acepta a L
- M_1 es el NFA *sin* transiciones-Λ que corresponde al NFA-Λ M

Eliminando transiciones-Λ



es equivalente a:



Eliminando transiciones-Λ

- Mediante δ^* se puede determinar el conjunto de estado alcanzados a partir de cualquier estado de un NFA-Λ (incluyendo transiciones-Λ) para cualquier cadena de cualquier longitud
- Estos estados incluyen aquellos que se pueden alcanzar con cadenas de longitud unitaria: $|x| = 1$.
- Estas cadenas corresponden a los símbolos del alfabeto!
- Podemos evitar las transiciones-Λ substituyendolas por las transiciones sobre los símbolos del alfabeto correspondientes

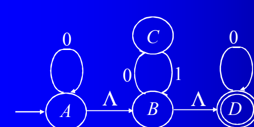
Eliminando transiciones-Λ

- Para encontrar el NFA correspondiente:
  - Dada la tabla de transición del NFA-Λ
  - Calcular δ^* del NFA-Λ para todos los estados, para todos los símbolos del alfabeto (cadenas de longitud 1). Esto es, calcular para todo q_i

    $\delta^*(q_i, \Lambda) = \Lambda(\{q_i\})$ &

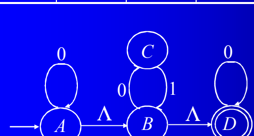
    $\delta^*(q_i, \Lambda a)$ para todo $a \in \Sigma$
  - El resultado de este proceso es la función de transición del NFA!

Reducción de NFA-Λ a NFA



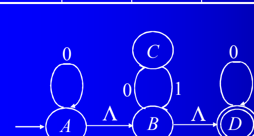
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ



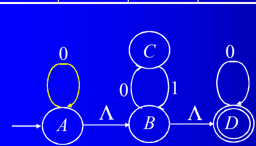
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$	$\delta^*(q, 0)$	$\delta^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ		
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ		
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$		
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ		



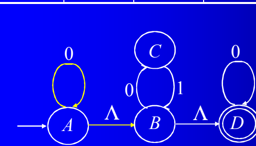
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$	$\delta^*(q, 0)$	$\delta^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ	$\{A\}$	
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ		
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$		
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ		



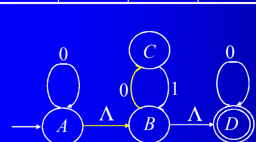
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$	$\delta^*(q, 0)$	$\delta^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ	$\{A, B\}$	
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ		
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$		
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ		



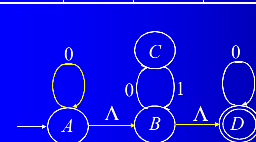
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$	$\delta^*(q, 0)$	$\delta^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ	$\{A, B, C\}$	
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ		
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$		
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ		



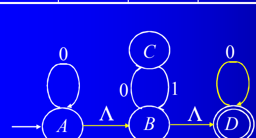
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$	$\delta^*(q, 0)$	$\delta^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ	$\{A, B, C, D\}$	
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ		
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$		
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ		



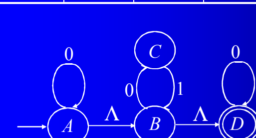
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$	$\delta^*(q, 0)$	$\delta^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ	$\{A, B, C, D\}$	
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ		
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$		
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ		



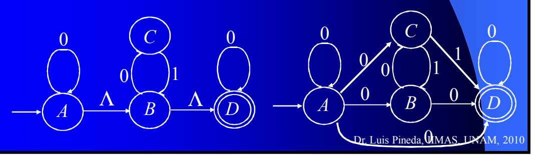
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$	$\delta^*(q, 0)$	$\delta^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ	$\{A, B, C, D\}$	ϕ
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ	$\{C, D\}$	ϕ
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$	ϕ	$\{B, D\}$
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ	$\{D\}$	ϕ



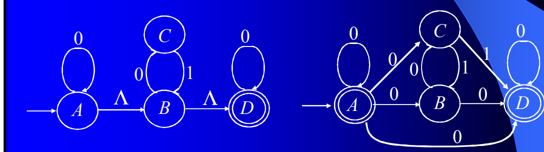
Reducción de NFA-Λ a NFA

q	$\delta(q, \Lambda)$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$	$\delta^*(q, 0)$	$\delta^*(q, 1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	ϕ	$\{A, B, C, D\}$	ϕ
B	$\{D\}$	$\{C\}$	ϕ	$\{C, D\}$	ϕ
C	ϕ	ϕ	$\{B\}$	ϕ	$\{B, D\}$
D	ϕ	$\{D\}$	ϕ	$\{D\}$	ϕ



Reducción de NFA-Λ a NFA

Si se pueden alcanzar estados aceptores mediante transiciones-Λ a partir del estado inicial, entonces el estado inicial también es aceptor!



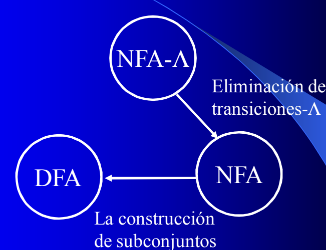
Los NFA-Λs son NFAs

- Si $L \subseteq \Sigma^*$ se acepta por un NFA-Λ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ existe un NFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ que también acepta L
- Este el caso si y sólo si: $\boxed{\delta_1^*(q, y) = \delta^*(q, y)}$
- $Q_1 = Q$ & los estados aceptores:

$$A_1 = \begin{cases} A \cup \{q_0\} & \text{Si } \Lambda(\{q_0\}) \cap A \neq \Phi \text{ en } M \\ A & \text{de otro modo} \end{cases}$$

- La prueba es por inducción!

La familia de FA



Los FAs son NFA-Λs

- Lo que sabemos hasta ahora:
  - L se puede reconocer por un FA
  - L se puede reconocer por un NFA
  - L se puede reconocer por un NFA-Λ

Los FAs son NFA-Λs

- Los siguientes tres enunciados son equivalentes:
  - Para todo NFA existe un FA equivalente (la construcción de subconjuntos)
  - Para todo NFA-Λ existe un NFA equivalente (elimando transiciones-Λ)
  - Para todo FA existe un NFA-Λ equivalente!

El NFA-Λ equivalente a un DFA

- Sea L un lenguaje aceptado por un a DFA
  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$
- Construimos un NFA-Λ equivalente:
  $M_1 = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta_1)$
  - Con el mismo conjunto de estados
  - El mismo alfabeto
  - El mismo estado inicial
  - El mismo conjunto de estados aceptores!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El NFA-Λ equivalente a un DFA

- La función de transición δ_1 es de tipo:
  $\delta_1: Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \rightarrow 2^Q$
  como sigue (para todo $q \in Q$ & $a \in \Sigma$):
  $\delta_1(q, \Lambda) = \phi$
  $\delta_1(q, a) = \{\delta(q, a)\}$
- El NFA-Λ trivial sin transiciones no-determinísticas o transiciones-Λ!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La familia de los FAs

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La cuarta descripción de los *LR*

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010