

Tema 1

Nociones Preliminares y Lenguajes

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Conceptos centrales

- Alfabetos
- Cadenas
- Lenguajes
- Representación
- Interpretación
- Problemas
- Funciones, algoritmos y fórmulas

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Alfabetos

- Conjunto finito (no vacío) de símbolos: Σ
 - $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega\}$
 - $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$
 - $\Sigma = \{1\}$
 - $\Sigma =$ El conjunto de caracteres ASCII

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cadenas

- Una cadena (o palabra) sobre un alfabeto Σ
 - Una secuencia finita de símbolos de Σ
- Longitud de una cadena
 - El número (posiciones) de símbolos en la cadena:
 - $w = "111"$ tiene un símbolo pero tres posiciones
 - La longitud de una cadena w es $|w|$
 - $|w| = 3$
- La cadena *nula*: Λ (lambda)
 - Λ se puede seleccionar en cualquier alfabeto
 - $|\Lambda| = 0$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cadenas

- Notación:
 - Minúsculas al principio del alfabeto denotan símbolos: a, b, c, \dots
 - Minúsculas al final del alfabeto denotan cadenas: w, x, y, z, \dots

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cadenas

- Potencias de un alfabeto
 - Si Σ es un alfabeto Σ^k es el conjunto de cadenas de longitud k , tales que todos los símbolos están en Σ
 - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
 - Si $\Sigma = \{0, 1\}$ entonces
 - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
 - $\Sigma^1 = \{0, 1\}$
 - $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$, etc.
 - $\Sigma \neq \Sigma^1$ (Σ es el alfabeto and Σ^1 es el conjunto de cadenas de longitud 1)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cadenas

- Para cualquier alfabeto Σ el conjunto de todas las cadenas sobre Σ se denota Σ^*
 - $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$
 - $\Sigma^* = \{0, 1\}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$
- Y sin Σ^0 :
 - $\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$
 - $\Sigma^+ = \{0, 1\}^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Σ^* es denumerable

- Un conjunto es *denumerable*, *enumerable infinito* o *contable* si puede ser ordenado en una sola lista (probablemente infinita):
 - 1, 2, 3, 4... es una lista infinita
 - 1, 3, 5, ..., 2, 4, 6... no lo es! ($\infty + 1$?)
 - Es necesario poder decir qué número le corresponde a cada elemento de la lista: quién le precede y quién le sigue
 - Un conjunto A es denumerable si existe una función con dominio en los números naturales N tal que a cada miembro de A se asocia un número n en N

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Σ^* es denumerable

N	Σ^*
1	Λ
2	0
3	1
4	00
5	01
6	10
7	11
8	000

N	Σ^*
9	001
10	010
11	011
12	100
13	101
14	110
15	111
16	...

$$\Sigma^* = \{0, 1\}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Σ^* es denumerable

- $\Sigma = \{a, \dots, z\}$ (26 letras)
 - Σ^0 tiene 1 cadena de longitud 0 (i.e. Λ)
 - Σ^1 tiene 26 cadenas de longitud 1 (i.e. a, \dots, z)
 - Σ^2 tiene 26^2 cadenas de longitud 2 (en orden alfabético)
 - Σ^3 tiene 26^3 cadenas de longitud 3 (en orden alfabético)
 - ...
- Existe una función tal que cada argumento n tiene como valor la cadena correspondiente en Σ^*

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cadenas

- Concatenación de cadenas:
 - Si x y y son cadenas xy denota la concatenación de x con y
 - Más específicamente: Si $x = x_1 x_2 \dots x_i$ & $y = y_1 y_2 \dots y_j$ entonces $xy = x_1 x_2 \dots x_i y_1 y_2 \dots y_j$
 - e.g. $x = 01101$ y $y = 110$ entonces $xy = 01101110$
 - $|xy| = i + j$
 - Identidad para la concatenación: $\Lambda x = x\Lambda = x$
 - La concatenación es asociativa: $(xy)z = x(yz)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cadenas

- Concatenación de conjuntos de cadenas
 - Si $A, B \subseteq \Sigma^*$ la concatenación de A y B es
$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ \& } y \in B\}$$
- La concatenación no es conmutativa
 - $A = \{a, b\}$ y $B = \{c, d\}$
 - $AB = \{ac, ad, bc, bd\}$
 - $BA = \{ca, cb, da, db\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Concatenación de cadenas

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ \& } y \in B\}$$

d	ad	bd
c	ac	bc
B \ A	a	b

Diferente de $BA = \{ca, cb, da, db\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cadenas

- Sin embargo:
 - $\Sigma^{n+1} = \Sigma \Sigma^n = \Sigma^n \Sigma$ ($\Sigma = \Sigma^1$)
 - If $\Sigma = \{0, 1\}$ then
 - $\Sigma^0 = \{\Lambda\}$
 - $\Sigma^1 = \{\Lambda\} \{0, 1\} = \{0, 1\} \{\Lambda\} = \{0, 1\}$
 - $\Sigma^2 = \{0, 1\} \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}$
 - $\Sigma^3 = \{0, 1\} \{00, 01, 10, 11\} = \{00, 01, 10, 11\} \{0, 1\}$
 $= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
 - ...

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cerradura de un conjunto de cadenas

- $\{x, y\}^*$ = Cadenas compuestas con x & y de todas las formas posibles!

y	xy	yy
x	xx	yx
	x	y

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Lenguajes

- Un *lenguaje* es un conjunto de cadenas compuestas con símbolos de un alfabeto
- Lenguajes naturales (Español, Inglés, etc.)
 - Nivel sintáctico: oraciones compuestas de palabras
 - Nivel léxico: palabras compuestas de símbolos del alfabeto
- Lenguajes formales
 - Nivel sintáctico: expresiones bien formadas compuestas de cadenas (tokens)
 - Nivel léxico: tokens compuestos por símbolos del alfabeto (e.g. ASCII)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definiciones de Lenguajes

- Un lenguaje sobre Σ es un subconjunto de Σ^*
- L es un lenguaje sobre Σ si $L \subseteq \Sigma^*$
- L no necesita incluir todos los símbolos de Σ , por lo mismo, si L es un lenguaje sobre Σ , también lo es sobre un super conjunto de Σ

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplos de Lenguajes

- El lenguaje de todas las cadenas formadas por n 0's seguidas de n 1's, para algún $n \geq 0$:
 $\{\Lambda, 01, 0011, 000111, \dots\}$
 - El conjunto de cadenas de 0's y 1's con el mismo número de ambos símbolos:
 $\{\Lambda, 01, 10, 0011, 0101, 1001, \dots\}$
 - El conjunto de cadenas representando los números primos en notación binaria:
 $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$
- pero ¿Es ésta una definición correcta?

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplos de Lenguajes

- Σ^* es un lenguaje sobre cualquier alfabeto
- Φ , el lenguaje vacío, es un lenguaje sobre cualquier alfabeto
- $\{\Lambda\}$, el lenguaje consistente de la cadena vacía
- En particular, notar que $\Phi \neq \{\Lambda\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Especificación de lenguajes

- Expresado con notación informal de conjuntos:
 - $\{w \mid \text{una propiedad de } w\}$
 - Ejemplo: $\{w \mid w \text{ consiste de una secuencia de } n \text{ 0's seguida de una secuencia de } n \text{ 1's}\}$
- Expresando w con parámetros
 - $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ donde n es el parámetro
 - $\{0^i 1^j \mid 0 \leq i \leq j\}$ donde i y j son los parámetros
- Combinando las operaciones de conjuntos con la concatenación
 - $\{ab, bab\}^* \cup \{b\}\{bb\}^*$
- E incluso:
 - $\{byb \mid y \in \{a, b\}^*\}$
- Es conveniente tener una manera simple y directa para definir lenguajes!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Representación

- Las cadenas de un lenguaje *representan* objetos del mundo:
 - Juan, Pedro y Luis se representan por $\{juan, pedro, luis\}$
 - 2, 3, 5, 7, 11 se representan por $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$
- Una representación puede pensarse como una función del mundo al lenguaje
- Es la función que evalúa quien envía un mensaje!

Juan $\xrightarrow{\text{se representa por}}$ *juan*

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Interpretación

- Las cadenas del lenguaje *se interpretan* como objetos en el mundo:
 - $\{juan, pedro, luis\}$ se interpretan como Juan, Pedro y Luis
 - $\{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$ se interpretan como 2, 3, 5, 7, 11
- Una interpretación se puede pensar como una función del lenguaje al mundo!
- Es la función que evalúa quien recibe el mensaje!

juan $\xrightarrow{\text{se interpreta como}}$ Juan

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Problemas

- Un *problema* consiste en decidir si una cadena pertenece a un lenguaje
- Si Σ es un alfabeto, L es un lenguaje sobre Σ , el problema L es:
 - Dada una cadena w en Σ^* , decidir si o no w está en L
- Problemas y lenguajes son realmente lo mismo

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Un Problema:

- El problema de decidir si un número es primo puede expresarse con el lenguaje L_p consistente de todas las cadenas monádicas cuya longitud sea un número primo:
 - $L_p = \{11, 111, 11111, 1111111, 111111111, \dots\}$
 - $111 \in L_p$
 - $1111 \notin L_p$
- Dada una cadena de 1's hay que decir "sí" o "no" dependiendo de si dicha cadena representa o no a un número primo

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Problemas

- Dos maneras de pensar acerca de los problemas:
 - Como un problema de decisión: Decidir si una cadena está incluida en el conjunto (i.e. el lenguaje)
 $111 \in \{11, 111, 11111, 1111111, 1111111111, \dots\} ?$
 - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida:



– ¿Qué es más fácil?

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmos

- Función: Objeto matemático
- Algoritmo: Procedimiento de cálculo
- Fórmula: Expresión compacta (analítica) del procedimiento!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El problema de los racionales

¿Cómo podemos decidir si un número es racional?

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El problema de los racionales

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los racionales son numerables!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

La función que los ordena...

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

\xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los racionales son numerables!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Forma de r

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

\xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Los enteros: $r(1) = 1, r(2) = 2, r(5) = 3, \dots$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Forma de r

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Redundante: $r(1) = r(3) = r(7) = r(13) = \dots = 1$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cualquier n está sobre un cuadrado de lado m :

$$sq(6) = 3$$

$$sq(8) = 3$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

$sq(n)$ es el numerador o el denominador de un racional en la imagen de r : $sq(n) = m$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Si n está en columna derecha:

$$r(n) = sq(n)/? = m/?$$

Ejemplo: $r(6) = sq(6)/? = 3/?$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Si n está en renglón inferior:

$$r(n) = ?/sq(n) = ?/m$$

Ejemplo: $r(8) = ?/sq(8) = ?/3$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo esquina inferior derecha:

Si n está en la columna derecha n es cuando más:

$$n \leq (sq(n) - 1)^2 + sq(n) = (m - 1)^2 + m$$

Ejemplo: $7 \leq (3 - 1)^2 + 3 = 7$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo de ? si n está en la columna derecha:
 Quitar a n el cuadrado anterior: $n - (sq(n) - 1)^2$
 Ejemplo: si $n = 6$: ? = $6 - (3 - 1)^2 = 2$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmo para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Cálculo de ? si n está en la renglón inferior:
 $sq(n)^2 - n + 1$
 Ejemplo: si $n = 8$: ? = $9 - 8 + 1 = 2$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmo y formula para $r(n)$

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

$$r(n) = \begin{cases} \frac{sq(n)}{n - (sq(n) - 1)^2} & \text{si } n \leq (sq(n) - 1)^2 + sq(n) \\ \frac{sq(n)^2 - n + 1}{sq(n)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Pero hay otras funciones...

1	2	4	7	...
3	5	8
6	9
10
...

 \xrightarrow{r}

1/1	2/1	3/1	...	m/1
1/2	2/2	3/2	...	m/2
1/3	2/3	3/3	...	m/3
...
1/m	2/m	3/m	...	m/m

Y otros algoritmos!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Algoritmos

- Función: independiente de la representación
- Algoritmo: dependiente de la representación
- Fórmula: expresión de un algoritmo!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Problemas

- Dos maneras de pensar acerca de los problemas:
 - Como un problema de decisión (declarativo):
 $1/2 \in \{1/1, 2/1, 2/2, 1/2, 3/1, 3/2, 3/3, 2/3, 1/3, \dots\}$?
 - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida (Procedural):

$1/2$ \longrightarrow Algoritmo \longrightarrow si

- Pero en este caso, podemos decidir en base a la estructura de las cadenas!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Problemas

- Pero que tal los primos:
 - Como un problema de decisión:
 $111 \in \{11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, \dots\}$?
 - Como un proceso que transforma una entrada en cierta salida:



- ¿Podemos ordenar los primos?
- Conocemos el algoritmo, pero no la función!
- Para conocer la función habría que enumerar los primos
- ¿Qué reflexiones podemos sacar?

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Teoría de la complejidad

- Todo algoritmo requiere recursos:
 - Pasos de procesamiento (tiempo)
 - Memoria
- El problema es complejo si lo expresamos tanto:
 - Como problema de decisión
 - Como proceso algorítmico

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010