Sesión 5

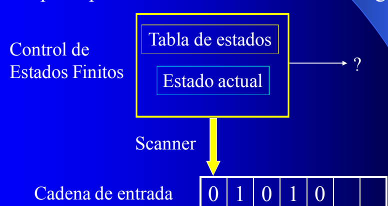
Autómatas Finitos

Una máquina para interpretar *ER*

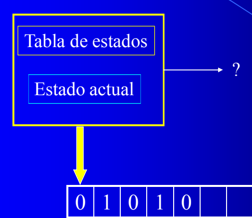
- $L = \{0, 1\}^*\{0\}$
  - Cadenas que terminan en 0 sobre $\Sigma = \{0, 1\}$

Una máquina para interpretar *ER*

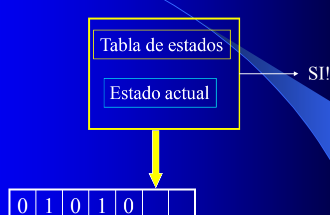
- $L = \{0, 1\}^*\{0\}$
  - Cadenas que terminan en 0 sobre $\Sigma = \{0, 1\}$
- Una máquina para identificar cadenas en el lenguaje:



Autómata de Estados Finitos (FA)



Autómata de Estados Finitos (FA)



¿Cuántos estados se necesitan?

- Asumimos:
  - Sólo una pasada sobre la cinta (de izquierda a derecha)
  - Una decisión tentativa después de leer cada símbolo (i.e. si la cadena pertenece al lenguaje)

¿Cuántos estados se necesitan?

- ¿Cuánto se necesita recordar para que la decisión después de leer el último símbolo de la cadena sea la correcta?
  - ¿Recordar todo?
  - ¿No recordar nada?
    - Si la máquina corresponde a Φ decidir siempre NO!
    - Si el lenguaje es Σ^* decidir siempre SI!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

¿Cuántos estados se necesitan?

- ¿Qué tal si tenemos que decidir?
  - ¿Qué tal si el lenguaje contiene información?
  - ¿Qué tal si hay cadenas x que pertenecen al lenguaje y cadenas y que no pertenecen?
  - ¡Tenemos que recordar algo!

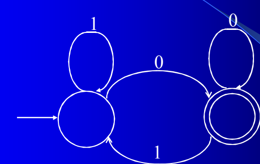
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo 1: Cadenas que terminan en 0

- $L = \{0, 1\}^*\{0\}$
  - $\Lambda \notin L$
  - La decisión si la cadena está en L depende sólo del último símbolo
  - Partimos a L^* en dos conjuntos:
    - Las cadenas que terminan en "1"
    - Las cadenas que terminan en "0"
  - Para nuestro propósito todas las cadenas en cada uno de estos conjuntos son equivalentes: son iguales en la única dimensión de interés
  - En cada estado sólo es necesario tomar en cuenta el último símbolo leído

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

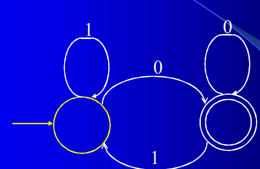
Una máquina para tomar la decisión: FA



$L = \{0, 1\}^*\{0\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

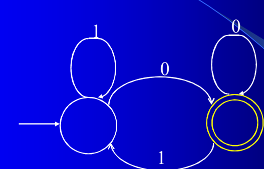
Estado inicial



- A donde se llega con la cadena Λ

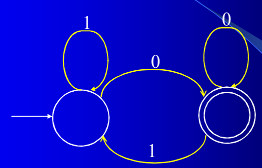
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Estado aceptor



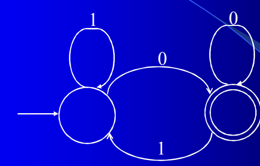
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Transiciones



- Si la máquina está en un estado dado y hay un arco etiquetado con un símbolo que corresponde al símbolo que se lee en dicho estado, la máquina se mueve al estado que está al final del arco

La máquina de Estados Finitos



- Hay dos estados: Uno por cada cosa que se recuerda
- El primero se acuerda de las cadenas terminadas 1
- El segundo en las que terminan en 0, y es aceptor!
- Hay un estado por cada clase de cadenas equivalentes!

Ejemplo 2: Cadenas que terminan en 0X

- L es $\{0, 1\}^*$ y el penúltimo símbolo es 0
  - $\Lambda \notin L$
- ¿Cuántas clases de cadenas hay?
- Hipótesis 1: hay dos clases
  - Cadenas que terminan en 00 y en 01
    - Pertenecen al lenguaje
  - Cadenas que terminan en 10 y en 11
    - NO pertenecen

Ejemplo 2: Cadenas que terminan en 0X

- ¿Qué pasa cuando se lee el siguiente símbolo?

✓…00 se convierte en 000 o 001
✗…01 se convierte en 010 o 011
No pertenece a la misma clase

✓…10 se convierte en 100 o 101
✗…11 se convierte en 110 o 111
No pertenece a la misma clase

Ejemplo 2: Cadenas que terminan en 0X

- Se necesitan cuatro clases de cadenas de longitud 2:
  - Cadenas que terminan en 00
  - Cadenas que terminan en 01
  - Cadenas que terminan en 10
  - Cadenas que terminan en 11

Ejemplo 2: Cadenas que terminan en 0X

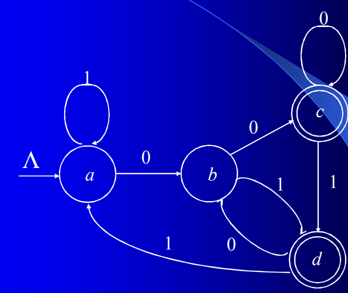
- Hay que considerar también las cadenas de longitud menor a 2:
  - Λ &1 pertenecen a la clase de 11, ya que se requieren dos siguientes símbolos para que la cadena completa esté en el lenguaje!
  - 0 está en la misma clase que 10: como subcadenas ninguna está en el lenguaje, pero una vez que se lea el siguiente símbolo, la subcadena estará en el lenguaje (a menos que ya no haya más símbolos que leer)

Ejemplo 2: Cadenas que terminan en 0X

- En conclusión, este lenguaje tiene cuatro clases:
  - Clase *a*: La cadena es Λ o 1 o terminada en 11
  - Clase *b*: La cadena es 0 o termina en 10
  - Clase *c*: Cadenas terminadas en 00
  - Class *d*: Cadenas terminadas en 01
- Para clasificar cadenas en el lenguaje necesitamos un FA con cuatro estados: uno por cada una de estas clases

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

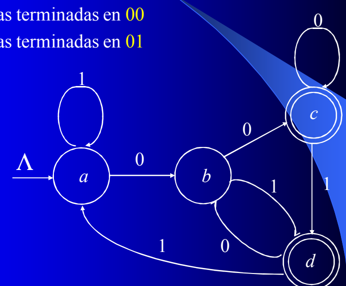
FA para aceptar cadenas terminadas en 0X



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo 2: Cadenas que terminan en 0X

- Clase *a*: La cadena es Λ o 1 o terminada en 11
- Clase *b*: La cadena es 0 o termina en 10
- Clase *c*: Cadenas terminadas en 00
- Class *d*: Cadenas terminadas en 01



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo 3: Cadenas que terminan en 11

- $L = \{0, 1\}^*\{11\}$
  - Primera hipótesis: Cuatro clases (cadenas de longitud 2)
    - …00
    - …01
    - …10
    - …11

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo 3: Cadenas que terminan en 11

- $L = \{0, 1\}^*\{11\}$
  - Sin embargo no necesitamos distinguir 00 & 10!
    - …00 se convierte en 000 o 001
    - …10 se convierte en 100 o 101
    - En ambos casos los últimos dos símbolos son iguales

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo 3: Cadenas que terminan en 11

- Nos quedan tres clases:
  - …00, …10
  - …01
  - …11

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo 3: Cadenas que terminan en 11

- También, la cadena 1 equivale a 01:
  - …01 se convierte en 010 o 011
  - 1 se convierte en 10 or 11
  - No importa que siga, ambas van a la misma clase!

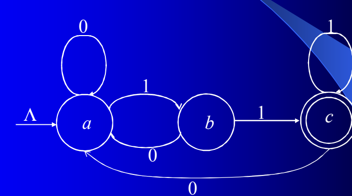
Ejemplo 3: Cadenas que terminan en 11

- Nos quedan tres clases:
  - …00, …10
  - …01, 1
  - …11
- También Λ & 0 son equivalentes a todas las cadenas que terminan en 0: No importa que símbolos se sigan, los sufijos de longitud dos o menos resultantes serán iguales!

Ejemplo 3: Cadenas que terminan en 11

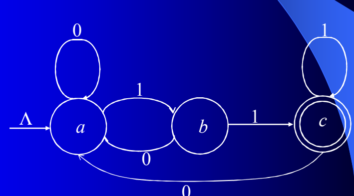
- ¡Y sólo nos quedaron tres clases!
  - …00, …10, Λ & 0
  - …01, 1
  - …11
- Refraseando:
  - Clase *a*: La cadena no termina en 1
  - Clase *b*: La cadena es 1 o termina en 01
  - Clase *c*: La cadena termina en 11

FA para cadenas que terminan en 11



FA para cadenas que terminan en 11

- Clase *a*: La cadena no termina en 1
- Clase *b*: La cadena es 1 o termina en 01
- Clase *c*: La cadena termina en 11



Definición formal de FA

- Un *Autómata de Estados Finitos*, o *Máquina de Estados Finitos* (FA) es un quinteto (Q, Σ, q_0, A, δ), donde:
  - Q es un conjunto finito (de estados)
  - Σ es un alfabeto (finito) de símbolos de entrada
  - $q_0 \in Q$ (El estado inicial)
  - $A \subseteq Q$ (El conjunto de estados aceptores)
  - δ es una función de Q x Σ a Q (la función de transición)
- Para cada q de Q & $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = p$, donde p es el estado al que el FA se mueve si está en el estado q cuando lee (escanéa) el símbolo a

Función de transición

Σ \ Q			
z	p_j	…	p_l
…	…	…	…
a	p_i	…	p_k
Σ \ Q	q_0	…	q_n

Para todo $q \in Q$ & $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = p$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Tres notaciones para FA

- Descripción abstracta
- Tabla de transición (de estados)
- Diagrama de transiciones (de estados)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Descripción abstracta

- Quinteto:

  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$
- Ejemplo:

  $M = (\{a, b, c\}, \{0, 1\}, a, \{c\}, \delta)$
  - Donde δ es como sigue:

    $\delta(a, 0) = a$ $\quad \delta(b, 0) = a$ $\quad \delta(c, 0) = a$

    $\delta(a, 1) = b$ $\quad \delta(b, 1) = c$ $\quad \delta(c, 1) = c$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

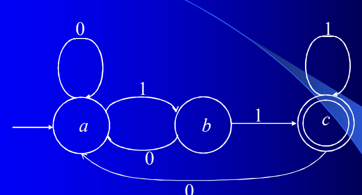
Table de transiciones

Q \ Σ	0	1
$\rightarrow a$	a	b
b	a	c
$*c$	a	c

- $\rightarrow$: Estado inicial
- * : Miembro del conjunto de estados aceptores

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Diagrama de Transiciones



- $\rightarrow$: Estado inicial
- ◎: Miembro del conjunto de estados aceptores

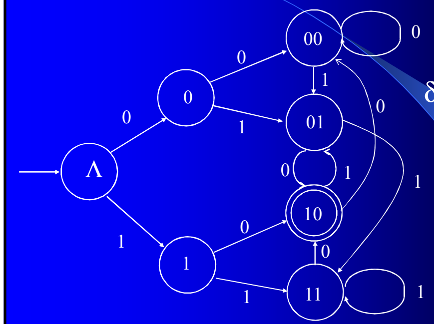
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo 4: Cadenas terminadas con 10

- $L = \{0, 1\}^*\{10\}$
- El peor de los casos: siete clases con cadenas de longitud $l \leq 2$
  - …00
  - …01
  - …10
  - …11
  - 1
  - 0
  - Λ

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

FA para reconocer $L = \{0, 1\}^*\{10\}$



$\delta(ab,c) = bc$

Tabla de transición

1	1	01	11	01	11	01	11
0	0	00	10	00	10	00	10
Σ / Q	Λ	0	1	00	01	10	11

Estado aceptor

Tabla de transición

¡A simple vista, hay tres clases equivalentes!

1	1	01	11	01	11	01	11
0	0	00	10	00	10	00	10
Σ / Q	Λ	0	1	00	01	10	11

La cadena 1 y las cadenas que terminan en 01 y 11 están en la misma clase!

Tabla de transición

1	1	01	11	01	11	01	11
0	0	00	10	00	10	00	10
Σ / Q	Λ	0	1	00	01	10	11

- Hay tres estados equivalentes!

Tabla de transición

1	1	01	11	01	11	01	11
0	0	00	10	00	10	00	10
Σ / Q	Λ	0	B	00	B	10	B

- Renombrando los estados 1, 01 & 11 como B

Tabla de transición

1	B	B	B	B	B	B	B
0	0	00	10	00	10	00	10
Σ / Q	Λ	0	B	00	B	10	B

- Actualizando en las entradas de la tabla el nuevo nombre de los estados 1, 01&11

Tabla de transición

1	B	B	B	B	B
0	0	00	10	00	00
Σ/Q	Λ	0	B	00	10

- Eliminando las columnas redundantes

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Tabla de transición

1	B	B	B	B	B
0	0	00	10	00	00
Σ/Q	Λ	0	B	00	10

- Ahora, los estados 0, 00 & 10 tienen las mismas transiciones!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Tabla de transición

1	B	B	B	B	B
0	0	00	10	00	00
Σ/Q	Λ	0	B	00	10

- 0 & 00 están en la misma clase
- Pero 10 es un estado aceptor, por lo que está en una clase aparte!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Tabla de transición

1	B	B	B	B	B
0	A	A	10	A	A
Σ/Q	Λ	A	B	A	10

- Renombrando 0 & 00 como A

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Tabla de transición

1	B	B	B	B
0	A	A	10	A
Σ/Q	Λ	A	B	10

- Eliminando la columna redundante

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Tabla de transición

1	B	B	B	B
0	A	A	10	A
Σ/Q	Λ	A	B	10

- Ahora, las columnas para Λ &A son iguales!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Tabla de transición

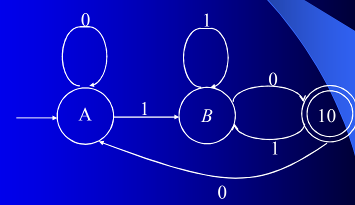
Σ \ Q	A	B	10
0	A	10	A
1	B	B	B

- Elimando la columna redundante Λ (renombrando como A)
- Obtenemos el FA mínimo para reconocer el lenguaje $L = \{0, 1\}^*\{10\}$

La función de transición δ:

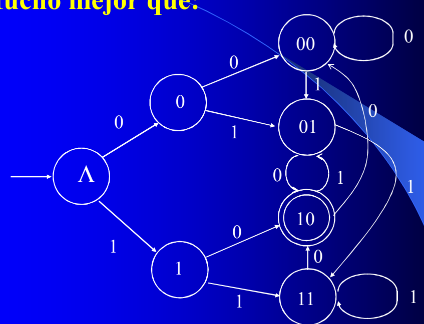
Σ \ Q	A	B	10
0	A	10	A
1	B	B	B

El **FA**:



¡el conjunto de clases equivalentes!

Mucho mejor que:



¡El meollo del asunto!

- Hay lenguajes que pueden ser aceptados por máquinas de estados finitos
- En una sola pasada!
- Una cadena se acepta si y sólo si:
  - Se leen todos los símbolos en la cinta de entrada
  - Se termina en un estado aceptor

¡El meollo del asunto!

- Todo estado corresponde a una clase de cadenas, que son equivalentes en relación al lenguaje
- Hay clases que se pueden recordar en más de un estado!
- El FA mínimo tiene un estado por cada clase de cadenas equivalentes!
- Esta es una propiedad MUY IMPORTANTE de los lenguajes aceptados por los Autómatas de Estados Finitos (FA)