

Sesión 6

El lenguaje aceptado por un FA

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Función de transición δ

z	p_j	...	p_l
...
a	p_i	...	p_k
Σ	Q	q_0	q_n

Para todo q en Q & $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = p$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Función de transición extendida

- δ permite moverse de un estado a otro con un símbolo de entrada
- δ nos da un medio para referirse o nombrar al estado siguiente en términos del estado actual y el símbolo de entrada:
 - $\delta(q, a) = p$
- Relación de referencia:

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Función de transición extendida

- Es muy conveniente contar con una forma de referirse al siguiente estado en función del estado actual y *una cadena de entrada*:
 - $\delta^*(q, x) = p$
- El estado p al que se llega a partir del estado actual q y una cadena dada
- La función de transición aumentada δ^* nos provee de este medio de referencia!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Función de transición extendida

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Función de transición extendida δ^*

...
x_1	p_{01}	...	p_{n1}
$x_0 = \Lambda$	p_{00}	...	p_{n0}
Σ^*	Q	q_0	q_n

Para todo q de Q & $x \in \Sigma^*$, $\delta^*(q, x) = p$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Definición formal de δ^*

- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ un FA
- Definimos la función $\delta^*: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ como sigue:
 - Para todo $q \in Q$, $\delta^*(q, \Lambda) = q$
 - Para todo $q \in Q$ & cualquier $y \in \Sigma^*$ & un símbolo $a \in \Sigma$

$$\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

```

    graph LR
      q0((q0)) -- a --> q1((q1))
      q1 -- b --> q2((q2))
      q2 -- c --> q3(((q3)))
  
```

- $\delta^*(q_0, abc) = q_3$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

```

    graph LR
      q0((q0)) -- a --> q1((q1))
      q1 -- b --> q2(((q2)))
      q2 -- c --> q3((q3))
  
```

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

```

    graph LR
      q0((q0)) -- a --> q1(((q1)))
      q1 -- b --> q2((q2))
      q2 -- c --> q3((q3))
  
```

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
 $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

```

    graph LR
      q0((q0)) -- a --> q1(((q1)))
      q1 -- b --> q2((q2))
      q2 -- c --> q3((q3))
  
```

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
 $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$
- Pero δ^* no está definida para cadenas de un solo carácter:

$$\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

```

    graph LR
      q0((q0)) -- a --> q1(((q1)))
      q1 -- b --> q2((q2))
      q2 -- c --> q3((q3))
  
```

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
 $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$
 $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda a), b), c)$
- Pero ... podemos usar la identidad de la concatenación!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda), a), b), c)$

• Usando la definición de δ^* :

$$\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda), a), b), c)$

• Nada inusual: aplicamos la identidad de la concatenación

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda), a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(q_0, a), b), c)$

• Usando la condición básica: $\delta^*(q, \Lambda) = q$

• Con esto hemos reducido δ^* a una composición de δ s

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda), a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(q_1, b), c)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda), a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(q_1, b), c)$
- $= \delta(q_2, c)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operación de δ^*

- $\delta^*(q_0, abc) = \delta(\delta^*(q_0, ab), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(\delta^*(q_0, \Lambda), a), b), c)$
- $= \delta(\delta(\delta(q_0, a), b), c)$
- $= \delta(\delta(q_1, b), c)$
- $= \delta(q_2, c)$
- $= q_3$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Como consecuencia de la definición de δ^*

- Composición de transición de cadenas:

$$\delta^*(q, xy) = \delta^*(\delta^*(q, x), y)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El lenguaje aceptado por un FA

- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ un FA
- $x \in \Sigma^*$ es aceptado por M si $\delta^*(q_0, x) \in A$
- Si una cadena no es aceptada por M , se rechaza!
- El lenguaje *aceptado* o *reconocido* por M es el conjunto:
 - $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ es aceptada por } M\}$
- Si L es cualquier lenguaje sobre Σ , L es aceptado, o reconocido, por M si y solo si $L = L(M)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Pero ...

- Esta definición no dice que L es aceptado por M si todas las cadenas de L son aceptadas por M
- Si fuera así, M podría aceptar también cadenas que no están en L !
- Un FA acepta un lenguaje si
 - Acepta todas las cadenas en L
 - Rechaza todas las cadenas en su complemento

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Pero ...



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

TEOREMA de Kleen

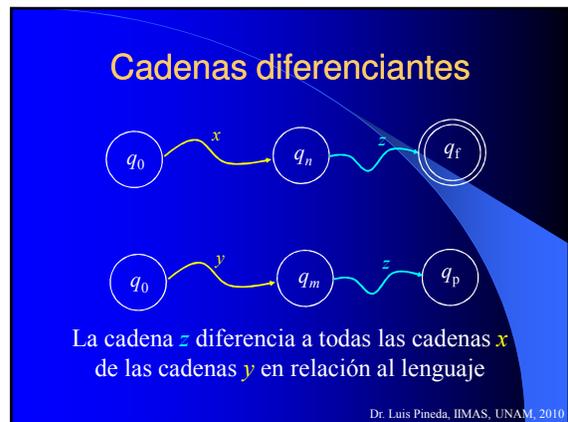
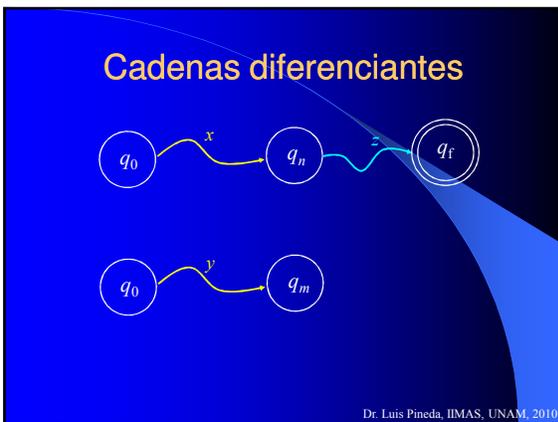
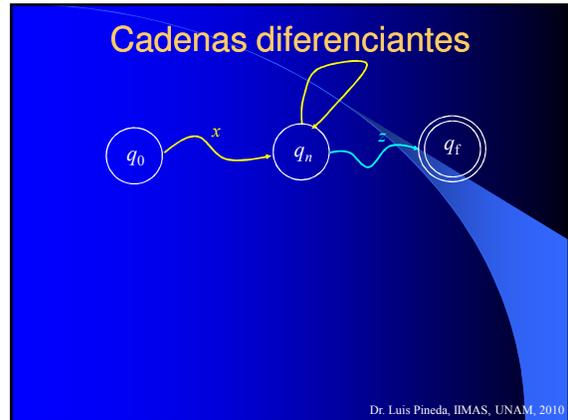
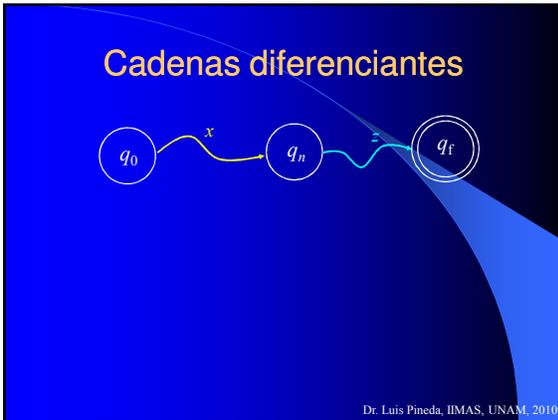
Un lenguaje L sobre el alfabeto Σ es regular si y sólo si existe un FA con alfabeto de entrada Σ que acepta a L .

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Relación entre FA y RE

- Si esto es verdad (y no les quepa la menor duda), las expresiones regulares y los autómatas de estados finitos son representaciones equivalentes: Si una *ER* denota a un lenguaje, existe un FA que acepta dicho lenguaje!
 - *ER* son representaciones declarativas
 - FA son representaciones procedurales

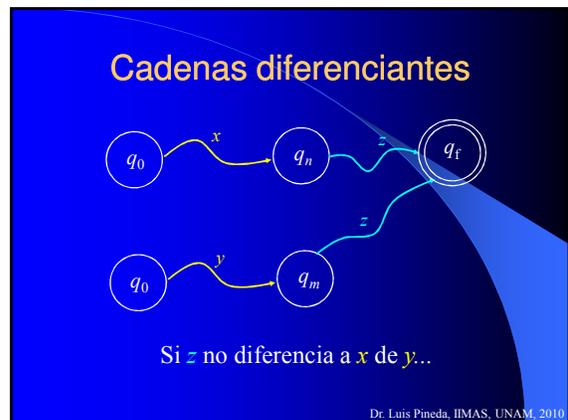
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

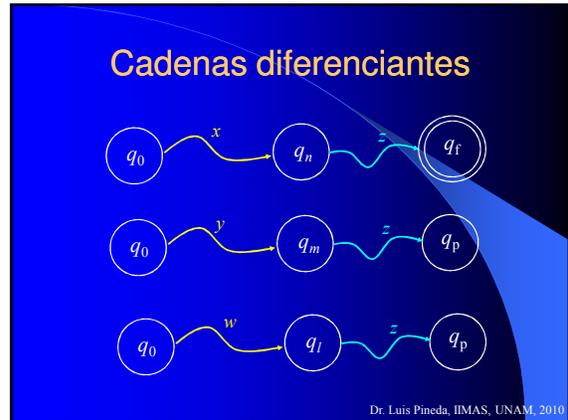
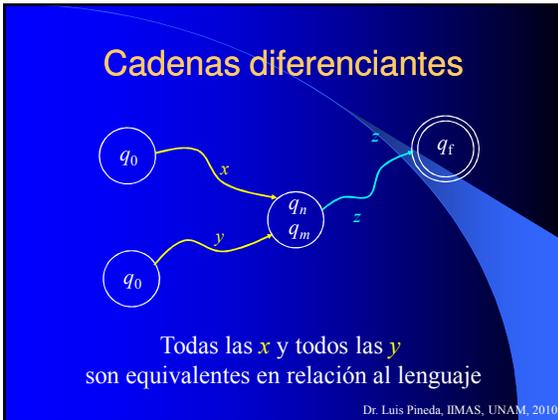


Cadenas diferenciantes

- Ejemplo: $L = \{w \mid |w| \text{ es par}\}$
 - Cualquier cadena z de longitud par distingue las cadenas de longitud par en L , de las cadenas de longitud non, que no están en L
 - L parte al universo de las cadenas en dos clases equivalentes:
 - Las cadenas de longitud par
 - Las cadenas de longitud non

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010





- ### Cadenas diferenciantes
- Sea L un lenguaje en Σ & $x \in \Sigma^*$
 - Sea L/x un conjunto de cadenas tal que:
 - $L/x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$
 - Dos cadenas x & y son diferenciables con respecto a L si
 - $L/x \neq L/y$
 - Toda cadena z tal que $xz \in L$ & $yz \notin L$ o viceversa, distingue (diferencia) a x & y con respecto a L
 - Si $L/x = L/y$, x & y son indistinguibles (equivalentes) con respecto a L
- Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- ### Cadenas diferenciantes
- Para mostrar que x and y son diferenciables con respecto a L
 - Encontrar z tal que $xz \in L$ PERO $yz \notin L$ o
 - Encontrar z tal que $yz \in L$ PERO $xz \notin L$
 - Entonces z está en L/x o L/y pero no en ambos!
- Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- ### Cadenas diferenciantes
- Ejemplo:
 - $L = \{w \mid |w| \text{ es par}\}$
 - Cualquier cadena z de longitud par distingue las cadenas de longitud par en L , de las cadenas de longitud non, que no están en L
 - $L/x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$
 - Si $|x|$ es non $|xz|$ también es non ($|z|$ es par) & $xz \notin L$
- Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- ### Cadenas diferenciantes
- Lema:
 - Sea $L \subseteq \Sigma^*$ & $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ es un FA que reconoce L .
 - Si x & y son cadenas en Σ^* diferenciables con respecto a L (en relación a la cadena diferenciante z), entonces:

$$\delta^*(q_0, xz) \neq \delta^*(q_0, yz)$$
 - ¡Un estado es aceptador pero no el otro!
- Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba del lema

- Un estado es aceptor pero no el otro:
 - $\delta^*(q_0, xz) \neq \delta^*(q_0, yz)$
- Los estados alcanzados a partir de q_0 con xz & con yz son, respectivamente:
 - $\delta^*(q_0, xz) = \delta^*(\delta^*(q_0, x), z)$
 - $\delta^*(q_0, yz) = \delta^*(\delta^*(q_0, y), z)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba del lema

- Ahora bien, si z es una cadena diferenciante:
 - $\delta^*(\delta^*(q_0, x), z) \neq \delta^*(\delta^*(q_0, y), z)$
- Entonces:
 - $\delta^*(q_0, x) \neq \delta^*(q_0, y)$
- Esto es: x & y llevan a M desde q_0 a estados diferentes!

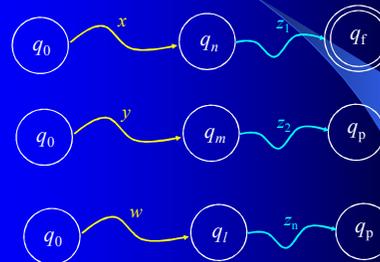
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Teorema

- Supongamos que $L \subseteq \Sigma^*$ y para cierta n , hay n cadenas en Σ^* , tales que cualquier par formado por estas cadena es distinguible (diferenciable) con respecto a L .
- Entonces, todo FA que reconozca a L debe tener cuando menos n estados.

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Cadenas diferenciantes



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba del teorema

- Supongamos que x_1, x_2, \dots, x_n son n cadenas, tales que cualquier par formado por éstas es distinguible con respecto a L
- Entonces, si $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ es un FA con menos de n estados NO todos los estados
 - $\delta^*(q_0, x_1)$
 - $\delta^*(q_0, x_2)$
 -
 - $\delta^*(q_0, x_n)$
 son diferentes!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Prueba del teorema

- Ya que para algún $i \neq j$,
 - $\delta^*(q_0, x_i) = \delta^*(q_0, x_j)$
- Pero, dado que x_i & x_j son diferenciables con respecto a L , se sigue del lema que M no puede reconocer a L

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

¿Cuándo un lenguaje no es regular?

- El teorema de las cadenas diferenciadoras nos permite determinar cuándo un lenguaje no es regular
- Si existe un número infinito de cadenas tales que cualquier par formado por las mismas es distinguible con respecto a L , cualquier FA que acepte L debe tener un número infinito de estados...
- Pero la "F" de "FA" quiere decir FINITOS
- Por lo tanto, ningún FA puede aceptar un lenguaje con un número infinito de cadenas diferenciadoras!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Un lenguaje no aceptado por un FA

- El lenguaje *pal* sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ no se acepta por ningún FA y por lo tanto, no es regular
- Palíndromo: *eva ama ave*
 - Palíndromos: $\Lambda, 0, 1, 0110, 11011$
- Prueba: Mostramos que cualquier par de cadenas x & y en $\{0, 1\}^*$ son diferenciables con respecto a *pal*

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Un lenguaje no aceptado por un FA

- Caso 1: $|x| = |y|$ & sea $z = x^r$
 - Entonces $xz = xx^r$ es una palíndromo
 - Si $x = 0101$ & $y = 1111$
 - $z = x^r = 1010$ & $xz = 01011010$ (*pal*)
 - Pero yz no lo es:
 - $yz = 11111010$
 - $z = x^r$ distingue a x de y para cualquier y
 - Cualquier cadena puede distinguirse de todas las demás de su misma longitud con respecto a *pal*

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Un lenguaje no aceptado por un FA

- Caso 2: $|x| \neq |y|$ & asumimos $|x| < |y|$
 - Sea $y = y_1y_2$ donde $|y_1| = |x|$
 - Buscamos una z tal que:
 - $xz \in \text{pal}$ pero $yz \notin \text{pal}$
 - Cualquier z de forma:
 - $z = ww^rx^r$
 - satisface $xz \in \text{pal}$
 - Esto es: $xz = xww^rx^r$ (i.e. xP_x^r)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Un lenguaje no aceptado por un FA

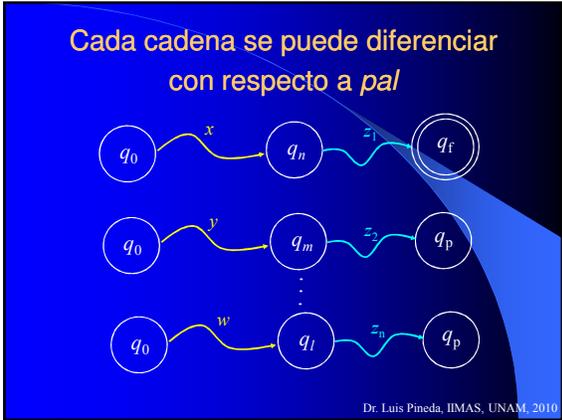
- Seleccionamos w (asegurándonos que $yz \notin \text{pal}$):
 - $yww^rx^r \notin \text{pal}$ o $y_1y_2ww^rx^r \notin \text{pal}$
 - Consideramos que $|y_1| = |x|$ por lo que y_1 podría ser x (e.g. $xy_2ww^rx^r$)
 - Escogemos una w tal que $|w| = |y_2|$ pero $y_2ww^r \notin \text{pal}$
 - Por lo mismo basta con que $w \neq y_2$ (en caso de que accidentalmente $w \in \text{pal}$ ya que www^r sería una palíndromo)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Un lenguaje que no es aceptado por un FA

- Caso 2: $|x| \neq |y|$ & asumimos $|x| < |y|$
 - (e.g. $x = 010$ & $y = 10101$)
 - Escogemos $w = 10$ (i.e. $w \neq y_2$)
 - Consecuentemente $xz = xww^rx^r$
 - (i.e. $xww^rx^r = 0101001010$)
 - Pero $yz = y_1y_2z = y_1y_2ww^rx^r$
 - (i.e. 101011001010)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



- ### Cadenas diferenciadoras
- ¿Cuántas clases diferentes hay en un lenguaje?
 - Para $L = \{w \mid |w| \text{ es par}\}$ hay dos clases de cadenas: pares y noes
 - Una sólo cadena (par) basta para distinguir a las dos clases
- Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- ### Cadenas diferenciadoras
- ¿Cuántas clases diferentes hay en un lenguaje?
 - Para el lenguaje de las palíndromes:
 - Necesitamos una z para clasificar a cada cadena con respecto a *pal*
 - Hay un número infinito de cadenas y para cada una de ellas podemos construir una palíndrome
 - Hay n clases de cadenas con respecto a *pal*, cada una de ellas con una sólo cadena!
- Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

