Sesión 7

Operaciones de conjuntos con FAs

Poder expresivo de las *ERs* y los FAs

Hasta ahora podemos definir FA básicos!
Pero también necesitamos definir FA compuestos a partir de FA básicos!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operaciones con FA

- De acuerdo con el Teorema de Kleen:
  - L_1 & L_2 son *LR* sobre Σ si y sólo si existen FA M_1 & M_2 que aceptan L_1 & L_2 respectivamente
- Por la definición de *LR*: Si L_1 & L_2 son *LR* también lo son:
  - $L_1 \cup L_2$,
  - $L_1 L_2$
  - L_1^*

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operaciones con FA

- Operaciones de conjuntos sobre *LR*
  - Unión: $L_1 \cup L_2$ es un *LR*
  - Intersección: $L_1 \cap L_2$ es un *LR*
  - Diferencia: $L_1 - L_2$ es un *LR*
- ¿Hay manera de generar máquinas que acepten estos lenguajes a partir de las máquinas M_1 & M_2 que aceptan los lenguajes L_1 & L_2?

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operaciones de conjuntos con FAs

- El caso para $L_1 \cup L_2$
  - Considere la cadena $x \in L_1 \cup L_2$
  - x pertenece a la unión si x pertenece ya sea a L_1 o a L_2
  - Sean M_1& M_2

    $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ tal que $L(M_1) = L_1$

    $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$ tal que $L(M_2) = L_2$
  - Procesar (analizar) x con ambas M_1 & M_2
  - $x \in L_1 \cup L_2$ si x es aceptada por cualquiera de M_1 o M_2

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operaciones de conjuntos con FAs

- Procesar la cadena x **simultaneamente por** M_1& M_2
  - $\delta_1^*(q_1, x) = p$
  - $\delta_2^*(q_2, x) = q$
- Tres máquinas relevantes:
  - Si $p \in A_1$ o $q \in A_2$ entonces x se acepta por la unión de M_1 con M_2
  - Si $p \in A_1$ & $q \in A_2$ entonces x se acepta por la intersección de M_1 & M_2
  - Si $p \in A_1$ & $q \notin A_2$ entonces x se acepta por la diferencias de M_1 menos M_2

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Operaciones de conjuntos con FAs

- El proceso paso a paso:
  - $\delta_1(p, a) = r$ (en la máquina M_1)
  - $\delta_2(q, a) = s$ (en la máquina M_2)
- La máquina compuesta se conceptualiza en términos de pares de estados de forma (r, s) a los que se llega a través del símbolo a a partir de estados de forma (p, q):
  - Se mueve de (p, q) a $(\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$

Estados compuestos

- Transición en M_1: $p_1 \xrightarrow{a} q_1$
- Transición en M_2: $p_2 \xrightarrow{a} q_2$
- Transición en máquina compuesta: $p_1p_2 \xrightarrow{a} q_1q_2$

Teorema (constructivo)

- Supogamos:
  - $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ tal que $\mathbf{L}(M_1) = L_1$
  - $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$ tal que $\mathbf{L}(M_2) = L_2$
- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ una construcción de M_1 & M_2 como sigue:
  - $Q = Q_1 \times Q_2$
  - $q_0 = (q_1, q_2)$
  - Para todo $p \in Q_1, q \in Q_2$ & $a \in \Sigma$:

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

Teorema (constructivo)

- Si $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \text{ o } q \in A_2\}$ entonces M acepta $L_1 \cup L_2$
- Si $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \text{ \& } q \in A_2\}$ entonces M acepta $L_1 \cap L_2$
- Si $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \text{ \& } q \notin A_2\}$ entonces M acepta $L_1 - L_2$

Prueba

- Defimos el lenguaje aceptado por la máquina M mediante la función δ^*, que a su vez se define en términos de las funciones δ_1^* and δ_2^* correspondientes a las máquinas M_1 & M_2, como sigue:
  - Para todo $x \in \Sigma^*$ & $(p, q) \in Q$:

$$\delta^*((p, q), x) = (\delta_1^*(p, x), \delta_2^*(q, x))$$

- La cadena x se acepta por M si y solo si

$$\delta^*((q_1, q_2), x) \in A$$

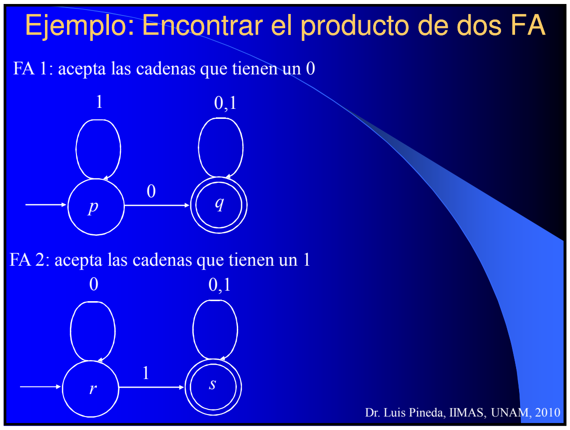
(i.e. Lleva a M del estado inicial a un estado aceptor)

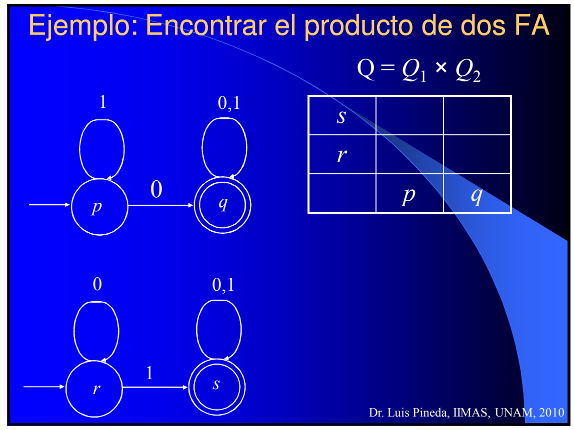
Prueba (cont...)

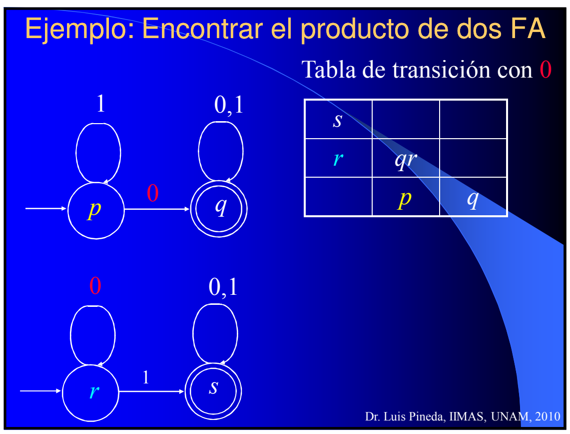
- Este es el caso si y solo si,

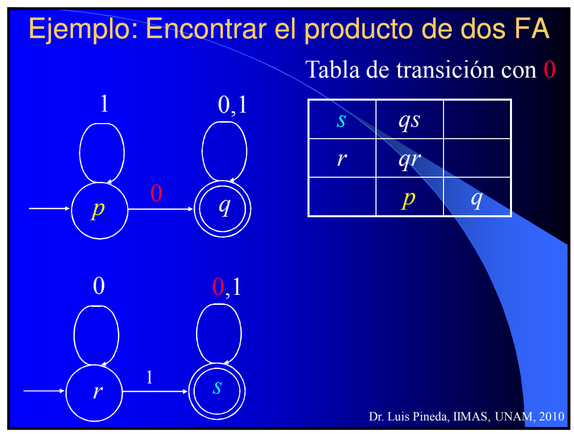
$$(\delta_1^*(q_1, x), \delta_2^*(q_2, x)) \in A$$

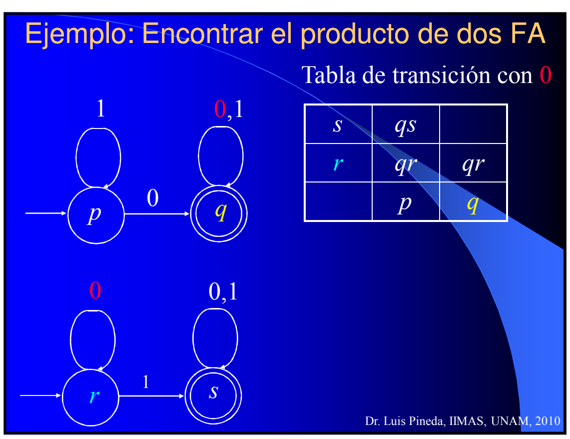
- El conjunto A se define para el caso de la unión como sigue:
  - $\delta_1^*(q_1, x) \in A_1$ o $\delta_2^*(q_2, x) \in A_2$
  - Y de manera similar para los otros dos casos

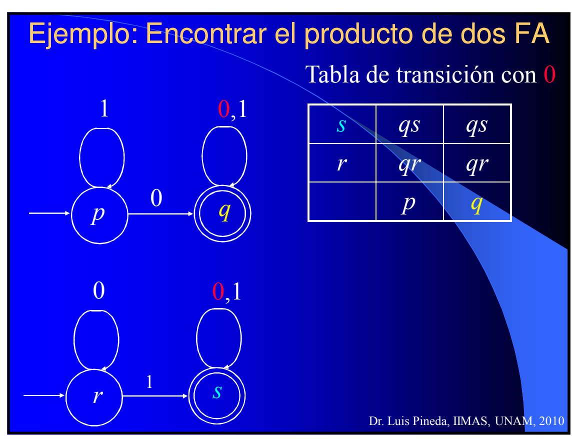

Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA
FA 1: acepta las cadenas que tienen un 0
1
0,1
0
p
q
FA 2: acepta las cadenas que tienen un 1
0
0,1
1
r
s
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010


Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA
$Q = Q_1 \times Q_2$
s
r
p q
1
0,1
0
p
q
0
0,1
1
r
s
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010


Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA
Tabla de transición con 0
s
r qr
p q
1
0,1
0
p
q
0
0,1
1
r
s
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010


Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA
Tabla de transición con 0
s qs
r qr
p q
1
0,1
0
p
q
0
0,1
1
r
s
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010


Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA
Tabla de transición con 0
s qs
r qr qr
p q
1
0,1
0
p
q
0
0,1
1
r
s
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010


Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA
Tabla de transición con 0
s qs qs
r qr qr
p q
1
0,1
0
p
q
0
0,1
1
r
s
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA

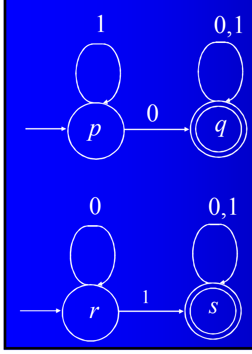


Tabla de transición con 1

s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

Ejemplo: Encontrar el producto de dos FA

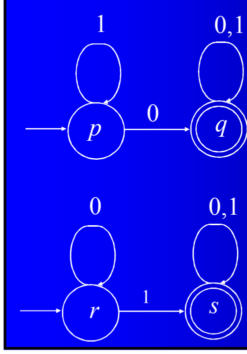


Tabla de transición con 0

s	qs	qs
r	qr	qr
	p	q

Tabla de transición con 1

s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

Teorema (constructivo)

- Sean M_1 & M_2
  - $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ tal que $L(M_1) = L_1$
  - $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$ tal que $L(M_2) = L_2$
- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ la construcción de M_1 & M_2 como sigue:

Teorema (constructivo)

- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ la construcción de M_1 & M_2 como sigue:
  - El conjunto de estados: $Q = Q_1 \times Q_2$
  - El estado inicial: $q_0 = (q_1, q_2)$
  - Para todo $p \in Q_1$, $q \in Q_2$ & $a \in \Sigma$

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

- Esto es lo que hemos construido hasta ahora!

La gráfica del FA

El conjunto de estados:

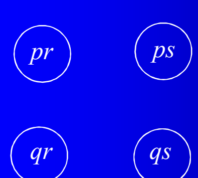


Tabla de transición con 0

s	qs	qs
r	qr	qr
	p	q

Tabla de transición con 1

s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

La gráfica del FA

El estado inicial:

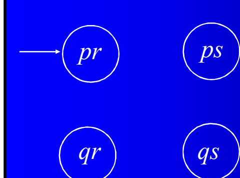


Tabla de transición con 0

s	qs	qs
r	qr	qr
	p	q

Tabla de transición con 1

s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

La función de transición del nuevo FA

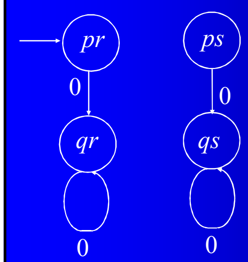


Tabla de transición con 0

s	qs	qs
r	qr	qr
	p	q

La función de transición del nuevo FA

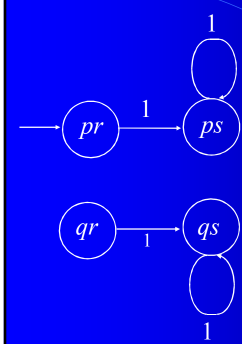


Tabla de transición con 1

s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

La función de transición del nuevo FA

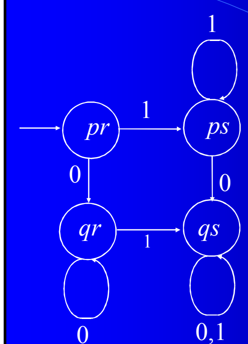


Tabla de transición con 0

s	qs	qs
r	qr	qr
	p	q

Tabla de transición con 1

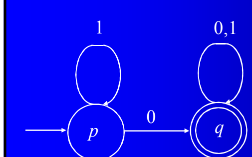
s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

Los estados aceptores

- Estados finales:
  - Si $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \text{ O } q \in A_2\}$ entonces M acepta $L_1 \cup L_2$
  - Si $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \;\&\; q \in A_2\}$ entonces M acepta $L_1 \cap L_2$
  - Si $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \;\&\; q \notin A_2\}$ entonces M acepta $L_1 - L_2$

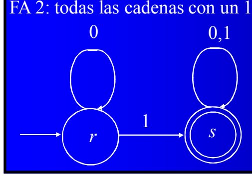
Estados aceptores del FA compuesto

FA 1: Todas las cadenas con un 0



$A_1 = \{q\}$

FA 2: todas las cadenas con un 1



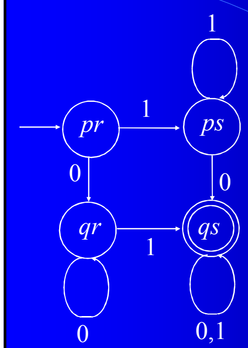
$A_2 = \{s\}$

FA para la intersección

- Si A = $\{(p, q) \mid p \in A_1 \;\&\; q \in A_2\}$ entonces M acepta $L_1 \cap L_2$
  - $Q = \{pr, ps, qr, qs\}$
  - $A_1 = \{q\}$ & $A_2 = \{s\}$

Entonces:
  - $A = \{qs\}$

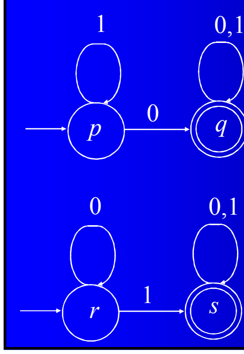
FA para la intersección



Acepta todas las cadenas que contengan cuando menos un 0 y un 1

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

FA para la unión



El lenguaje que contiene ya sea al menos un 0 o al menos un 1

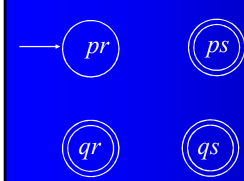
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

FA para la unión

- Si A = $\{(p, q) \mid p \in A_1$ O $q \in A_2\}$ entonces M acepta $L_1 \cup L_2$
  - $Q = \{pr, ps, qr, qs\}$
  - $A_1 = \{q\}$ O $A_2 = \{s\}$ entonces:
  - $A = \{ps, qr, qs\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

FA para la unión



Los estados finales tienen a q o a s!

Tabla de transición con 0

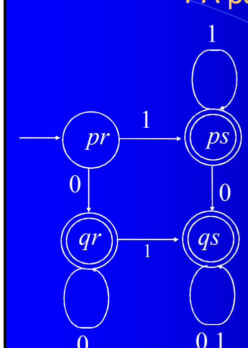
s	qs	qs
r	qr	qr
	p	q

Tabla de transición con 1

s	ps	qs
r	ps	qs
	p	q

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

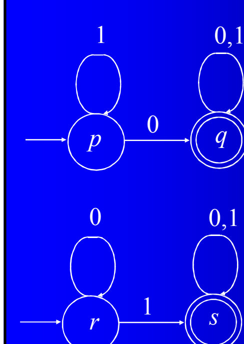
FA para la unión



El lenguaje que contiene ya sea al menos un 0 o al menos un 1

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

FA para la diferencia!



El lenguajes con las cadenas que contiene cuando menos un 0, pero que no contienen 1'*s*

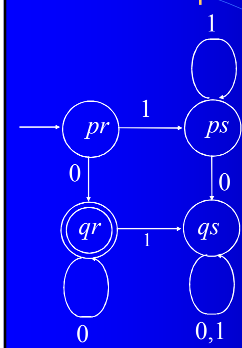
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

FA para la diferencia!

- Si $A = \{(p, q) \mid p \in A_1 \; \& \; q \notin A_2\}$ entonces M acepta $L_1 - L_2$
  - $Q = \{pr, ps, qr, qs\}$
  - $A_1 = \{q\}$ Pero NO $A_2 = \{s\}$

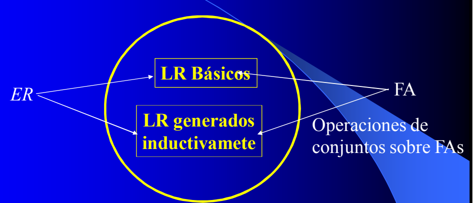
  entonces:
  - $A = \{qr\}$

FA para la diferencia!



El lenguajes con las cadenas que contiene cuando menos un 0, pero que no contienen 1s

Poder expresivo de las *ERs* y los FAs



Sin embargo, nos hacen falta todavía generar la composición y la cerradurra de FAs!