

## Sesión 8

### Automatas Finitos no-determinísticos

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

## FA No-determinísticos

- Motivación
- Concepto de no-determinismo
- Definición de NFA
- Función de transición aumentada para NFA
- El lenguaje aceptado por un NFA

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Motivación

- Diseñar un DFA que acepte:  $\{11,110\}^* \{0\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- Diseño incremental símbolo por símbolo:  $\{11,110\}^* \{0\}$

```

    graph TD
      q0((q0)) -- 0 --> p((p))
      q0 -- 1 --> r((r))
      style p stroke-width:2px
      style r stroke-width:2px
  
```

- La cadena  $\Lambda$  no está en  $L$ , &  $q_0$  no es un estado aceptor
- Pero 0 está en  $L$ : lleva a un estado aceptor
- 1 es el símbolo inicial de las subcadenas 11 & 110: las palabras en el prefijo del lenguaje (antes del último 0).

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- Diseño incremental símbolo por símbolo:  $\{11,110\}^* \{0\}$

```

    graph TD
      q0((q0)) -- 0 --> p((p))
      q0 -- 1 --> r((r))
      p -- 0,1 --> s((s))
      s -- 0 --> r
      s -- 0,1 --> dead(( ))
      style p stroke-width:2px
      style r stroke-width:2px
  
```

- $L$  no contiene:
  - Cadenas que empiecen con 0 (excepto 0)
  - Cadenas que empiecen con 10
- Tenemos un estado “coladera” o “muerto”!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- Diseño incremental símbolo por símbolo:  $\{11,110\}^* \{0\}$

```

    graph TD
      q0((q0)) -- 0 --> p((p))
      q0 -- 1 --> r((r))
      p -- 0,1 --> s((s))
      s -- 0,1 --> r
      r -- 1 --> t((t))
      t -- 0 --> u((u))
      u -- 0,1 --> dead(( ))
      style p stroke-width:2px
      style r stroke-width:2px
      style u stroke-width:2px
  
```

- Al estado  $r$  se llega con 1 (y se necesita 10)
- Al estado  $t$  se llega con 11 (y se necesita un 0)
- Al estado  $u$  se llega con 110: pertenece al lenguaje!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- Diseño incremental símbolo por símbolo:  $\{11,110\}^*\{0\}$

- También hay que considerar las repeticiones de 11
- Al estado  $r$  se llega con una secuencia non de 1's
- Al estado  $t$  con una secuencia par de 1's

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- Diseño incremental símbolo por símbolo:  $\{11,110\}^*\{0\}$

- Al estado  $u$  se llega con una secuencia par de 1's, seguida de un 0: pertenece al lenguaje

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- Diseño incremental símbolo por símbolo:  $\{11,110\}^*\{0\}$

- Al estado  $u$  se llega con 110
- Con un 0 adicional se llega a  $p$ : la cadena pertenece a  $L$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- Diseño incremental símbolo por símbolo:  $\{11,110\}^*\{0\}$

- La cadena 110 antes del último 0 puede aparecer  $n$  veces!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- DFA que acepta:  $\{11,110\}^*\{0\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

- Para una *ER* más complicada:
  - Encontrar el FA equivalente puede ser muy laborioso!
  - Verificar que sea el correcto: Muy complicado!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

• Pero que tal el siguiente FA:  $\{11,110\}^* \{0\}$

• Podemos leer la expresión del diagrama directamente!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

• Pero que tal el siguiente FA:  $\{11, 110\}^* \{0\}$

• Podemos leer la expresión del diagrama directamente!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

• Pero que tal el siguiente FA:  $\{11,110\}^* \{0\}$

Falta arco con 0

Falta arco con 0

Falta arco con 1

• Pero, tenemos estados a los que faltan transiciones para algunos símbolos de  $\Sigma$

• No problema: asumimos estado coladera (no aceptor)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

• Pero que tal el siguiente FA:  $\{11,110\}^* \{0\}$

• Hay un estado al que le siguen dos estados diferentes con el mismo símbolo!

• Este FA (este mismo) NO es determinístico: NFA

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Concepto de No-determinismo

• Un FA es no-determinístico si tiene uno o más estados para los que hay más de un siguiente estado para el mismo símbolo (en la cinta)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Concepto de No-determinismo

• Hay varias maneras de concebirlo:

- Como  $n$  DFAs que corren en paralelo: un FA para cada trayectoria posible
- Como un FA que “adivina” el siguiente estado cuando hay la opción

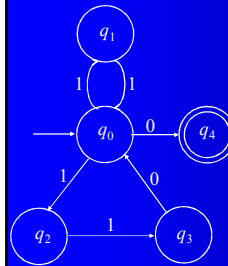
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

## Concepto de No-determinismo

- Hay varias maneras de concebirlo:
  - Como una especificación abstracta de la computación:
    - Independientemente de la máquina (el algoritmo) que lleva a cabo el proceso
    - Como la disyunción (unión) de FA!

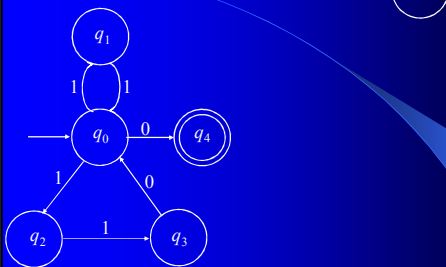
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### • Análisis de 11110:



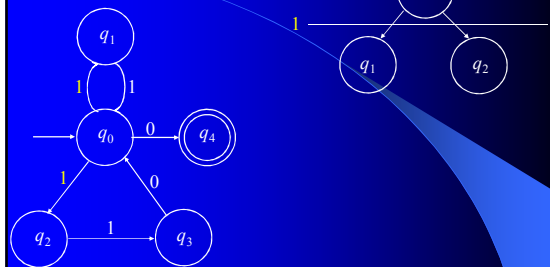
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### • Análisis de $\Delta$ 11110:



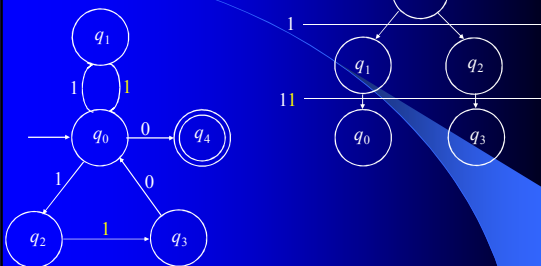
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### • Análisis de 11110:



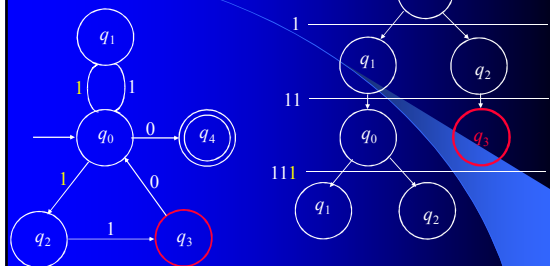
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### • Análisis de 11110:

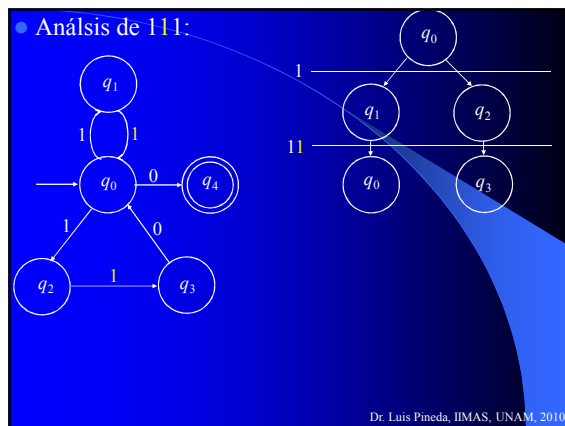
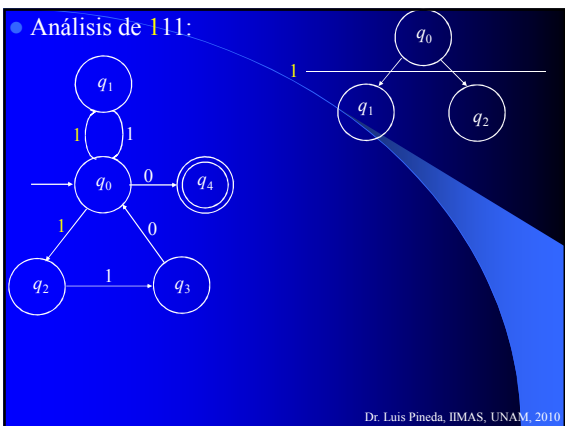
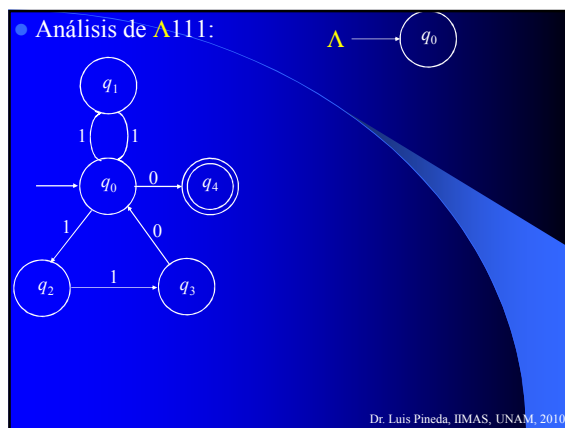
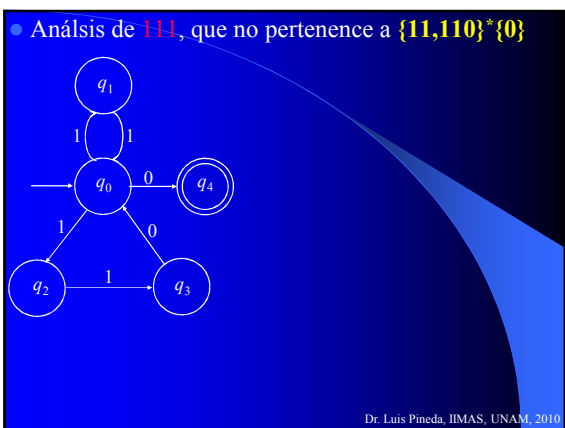
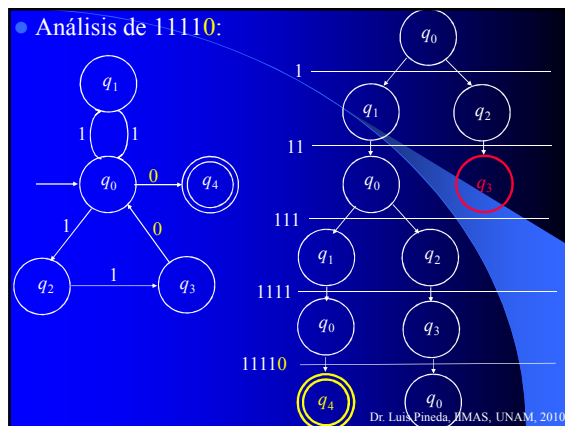
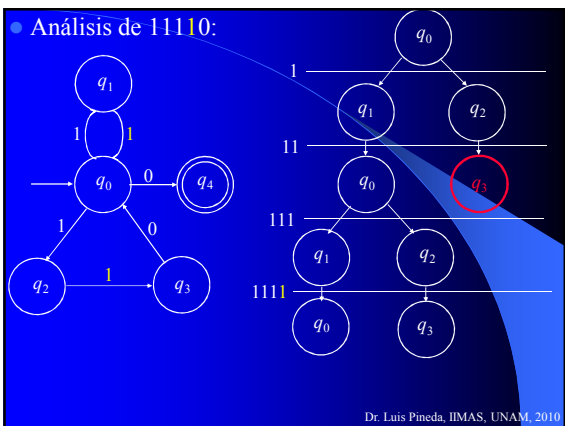


Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### • Análisis de 11110:



Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



• Análisis de 111:

• La cadena se rechaza: se llega a un estado no aceptor (después de leerla completamente)

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### No-determinismo y abstracción

- Los procesos en estructuras de árboles son no-determinísticos
- Estrategias de búsqueda *serializan* el recorrido de un árbol

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### No-determinismo y abstracción

- Una especificación declarativa permite ver si una condición se satisface, independientemente de la computación concreta!
- El no-determinismo nos permite expresar abstracción disyuntiva
- Dota a los FA de la expresividad que la operación de unión da a las *RE*!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Definición de NFA

- Un Autómata Finito No-Determinístico (NFA) es una quinteta  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ , donde
  - $Q$  es un conjunto finito (de estados)
  - $\Sigma$  es una alfabeto (finito)
  - $q_0 \in Q$  (el estado inicial)
  - $A \subseteq Q$  (el conjunto de estados aceptores)
  - La función de transición:
    - $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
- La única diferencia entre un DAF y un NFA es el tipo de  $\delta$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Función de transición

- Función de transición para DFA:
  - $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$
- Función de transición para NFA:
  - $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
- El tipo del rango de  $\delta$  es un conjunto de estados!

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Tabla de transición para DFA

	0	1
$q_0$	$p$	$r$
$p$	$s$	$s$
$s$	$s$	$s$
$r$	$s$	$t$
$t$	$u$	$r$
$u$	$p$	$r$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Tabla de transición para NFA

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
$q_1$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$q_2$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
$q_3$	$\{q_0\}$	$\emptyset$
$q_4$	$\emptyset$	$\emptyset$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### Función de transición aumentada para NFA

- Sea  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$  un NFA.
- La función  $\delta^*: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$  se define como sigue:
  - Para todo  $q \in Q, \delta^*(q, \Lambda) = \{q\}$
  - Para todo  $q \in Q, y \in \Sigma^* \text{ \& } a \in \Sigma$ :

$$\delta^*(q, ya) = \bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r, a)$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Intuitivamente  $\delta^*(q_0, 11)$  es:

$\delta^*(q_0, 11) = \{q_0, q_3\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Formalmente,  $\delta^*(q_0, 11)$  es:

$\delta^*(q_0, 11)$  tiene la forma  $\delta^*(q_0, ya)$

Def. of  $\delta^*$

$$\delta^*(q, \Lambda) = \{q\}$$

$$\delta^*(q, ya) = \bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r, a)$$

$r \in \delta^*(q_0, \Lambda) = \{q_0\}$   
 $\delta^*(q_0, \Lambda 1) = \delta(q_0, 1) = \{q_1, q_2\}$   
 $r \in \delta^*(q_0, \Lambda 1) = \{q_1, q_2\}$   
 $\delta^*(q_0, \Lambda 11) = \delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1) = \{q_0, q_3\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

### El lenguaje aceptado por un NFA

- Sea  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$  un NFA.
  - La cadena  $x \in \Sigma^*$  se acepta por  $M$  si  $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$
  - El lenguaje reconocido por  $M$  es el conjunto  $L(M)$  de todas las cadenas aceptadas por  $M$
  - Para todo lenguaje  $L \subseteq \Sigma^*, M$  reconoce a  $L$  si  $L = L(M)$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Aceptando 11110:

$\delta^*(q_0, \Lambda 11110) = \{q_0, q_4\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

• Aceptando 11110:

$$\delta^*(q_0, \Lambda 11110) = \{q_0, q_4\}$$

$$A = \{q_4\}$$

$$\delta^*(q_0, \Lambda 11110) \cap A = \{q_4\} \neq \emptyset$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

• Pero, si la cadena es 111:

$$\delta^*(q_0, \Lambda 111) = \{q_1, q_2\}$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

• Rechazando 111:

$$\delta^*(q_0, \Lambda 111) = \{q_1, q_2\}$$

$$A = \{q_4\}$$

$$\delta^*(q_0, \Lambda 111) \cap A = \emptyset$$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010