Sesión 9

NFA son FA: La construcción de subconjuntos
(The subset construction)

Los NFAs son FAs

- Para todo NFA
  $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$
  que acepta el lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, existe un FA
  $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$
  que acepta a L
- Para todo NFA, existe un algoritmo que encuentra su DFA equivalente!

Los NFAs son FAs

- Los algoritmos de búsqueda ilustran como todas las trayectorias de un árbol (i.e. "no-determinísticas") pueden can explorarse determinísticamente:
  - M: NFA es una especificación
  - M_1: DFA es una implementación!
  - Dada una especificación siempre debe ser siempre posible encontrar una implementación (un algoritmos) automáticamente!

La construcción de subconjuntos

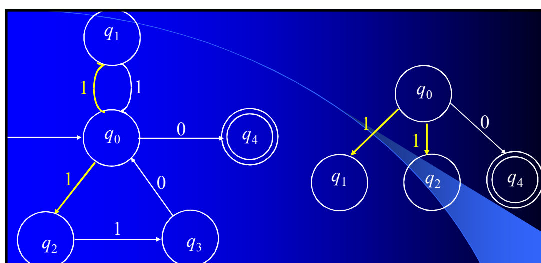
- Prueba: Encontrar un DFA M_1 a partir de la definición de un NFA M
- Encontrar cómo construir M_1 a partir de de la definición de M

La construcción de subconjuntos

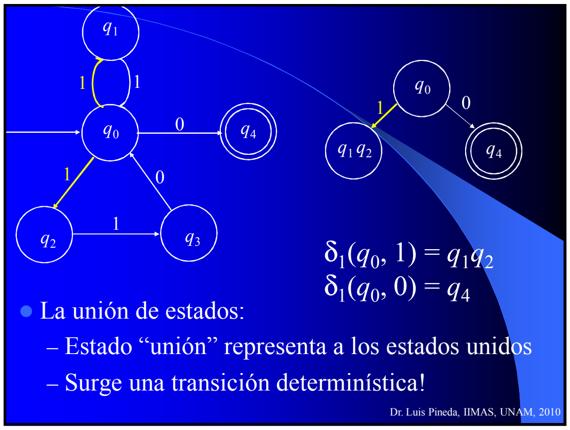
- M_1 se define como sigue:
  - El conjunto de estados de M_1: $Q_1 = 2^Q$,
  - El estado inicial de M_1: $q_1 = \{q_0\}$
  - La función de transición de M_1:
    Para todo $q \in Q_1$ & $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q,a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r,a)$$

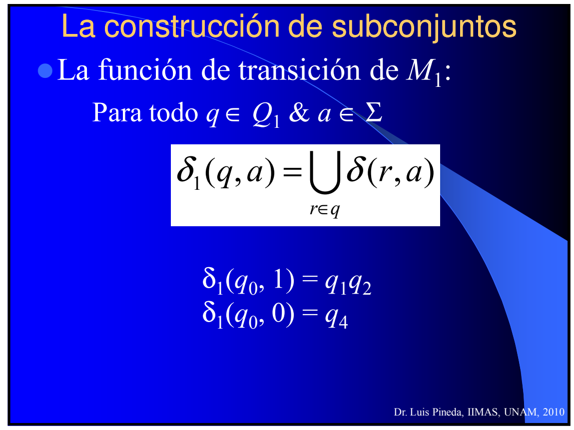
  - El conjunto de estados aceptores de M_1:
    $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \emptyset\}$



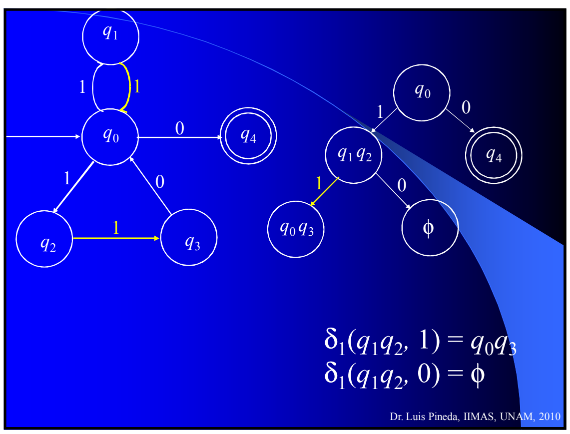
$\delta(q_0, 1) = \{q_1, q_2\}$
$\delta(q_0, 0) = \{q_4\}$



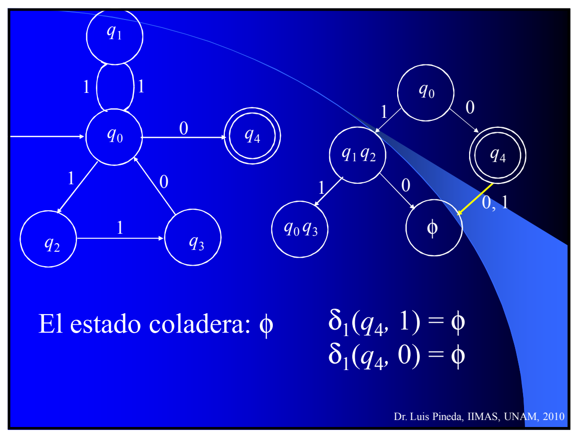
$\delta_1(q_0, 1) = q_1q_2$
$\delta_1(q_0, 0) = q_4$
La unión de estados:
– Estado "unión" representa a los estados unidos
– Surge una transición determinística!
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



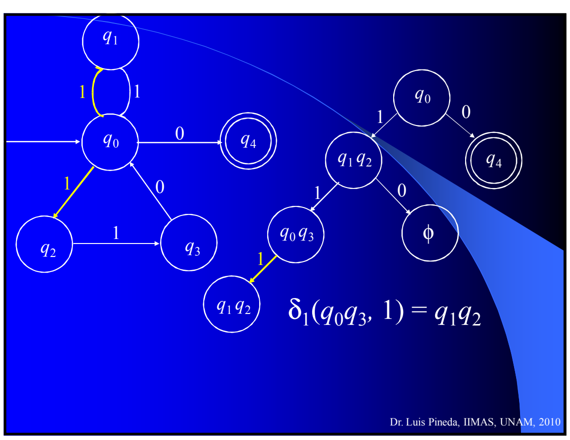
La construcción de subconjuntos
La función de transición de M_1:
Para todo $q \in Q_1$ & $a \in \Sigma$
$\delta_1(q,a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r,a)$
$\delta_1(q_0, 1) = q_1q_2$
$\delta_1(q_0, 0) = q_4$
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



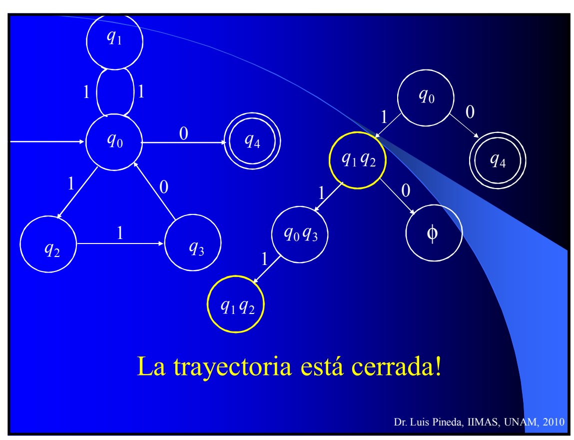
$\delta_1(q_1q_2, 1) = q_0q_3$
$\delta_1(q_1q_2, 0) = \phi$
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



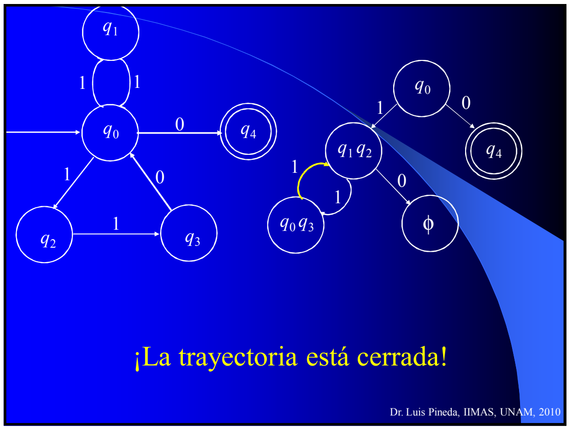
El estado coladera: ϕ
$\delta_1(q_4, 1) = \phi$
$\delta_1(q_4, 0) = \phi$
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

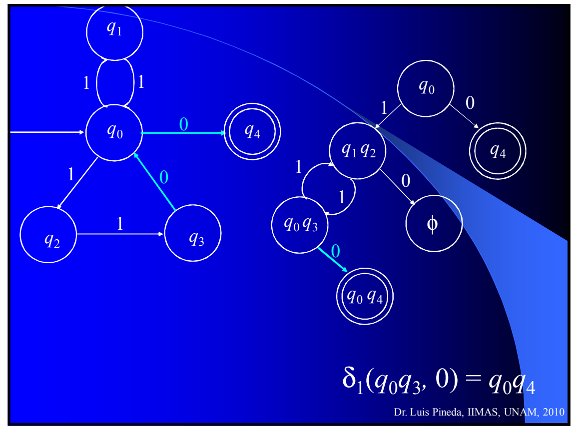


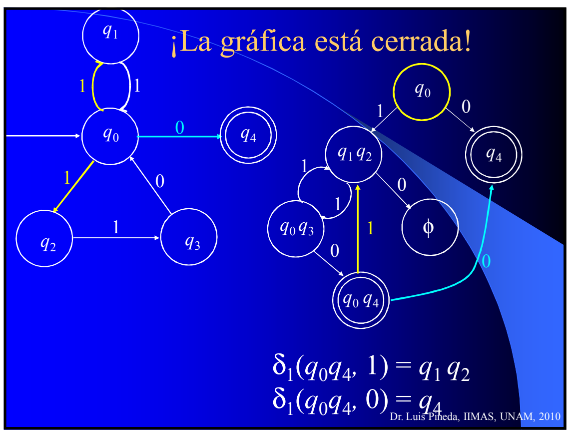
$\delta_1(q_0q_3, 1) = q_1q_2$
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010



La trayectoria está cerrada!
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010







Los estados de la construcción

- Los estados (nombres) de M_1 se definen a partir de los estados (sus nombres) de M:
- M_1 se define como sigue:
  - El conjunto de estados de M_1: $Q_1 = 2^Q$,
  - El estado inicial de M_1: $q_1 = \{q_0\}$
- Si M tiene 5 estados:
  - Entonces M_1 tiene $2^5 = 32$ estados posibles!
  - Afortunadamente sólo necesitamos 6!

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$^*q_4$	ϕ	ϕ

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

El conjunto potencia 2^Q

- Número de conjuntos de n objetos tomados r a la vez!

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- M tiene 5 estados:
  - El estado vacío: ϕ
  - 5 estados con 1 estado: $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_4\}$
  - 10 estados con 2 estados: $\{q_0 q_1\}, \{q_0 q_2\}, \{q_0 q_3\}, \ldots$
  - 10 estados con 3 estados: $\{q_0 q_1 q_2\}, \{q_0 q_2 q_3\}, \{q_0 q_3 q_4\}, \ldots$
  - 5 estados con 4 estados: $\{q_0 q_1 q_2 q_3\}, \{q_0 q_1 q_2 q_4\}, \ldots$
  - 1 estado con 5 estados: $\{q_0 q_1 q_2 q_3 q_5\}$

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Un código binario para nombrar a los estados de M_1

- El estado con q_1 & q_3:

Estados de M	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
Nombre del estado en M_1	0	1	0	1	0

- Hay $2^{|Q|}$ estados posibles en M_1 (32 en este caso)
- Cada numeral binario, del 0 al 31, nombra a cada uno de los estados respectivamente

Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010

Las entradas posibles de δ_1:

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000		
00001		
00010		
00011		
00100		
00101		
00110		
00111		

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
01000		
01001		
01010		
01011		
01100		
01101		
01110		
01111		

ie. 01011 es el estado $0q_10q_3q_4 = q_1q_3q_4$

Las entradas posibles de δ_1:

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
10000		
10001		
10010		
10011		
10100		
10101		
10111		
10111		

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
11000		
11001		
11010		
11011		
11100		
11101		
11110		
11111		

La construcción de subconjuntos

- Conjunto de estados de M_1:
  $Q_1 = 2^Q$,
- Estado inicial de M_1: $q_1 = \{q_0\}$
  - $q_1 = \{q_0\} = 10000$
- Estados aceptores de M_1:
  $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \emptyset\}$
  $A = \{q_4\}$
  - Todos los estados cuyo nombre tiene el patrón XXXX1 contienen a q_4, por lo que son estados aceptores

El NFA M:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

La construcción de subconjuntos

- La función de transición de M_1:
  Para todo $q \in Q_1$ & $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q,a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r,a)$$

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000		
$\rightarrow$10000		

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

$00000 = \phi$, $q_0 = 10000$, $q_1 = 01000$ and $q_4 = 00001$

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000		
$\rightarrow$10000	00001	01100

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

$\delta_1(10000, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_4\}$
$\delta_1(10000, 1) = \delta(q_0, 1) = \{q_1, q_2\}$

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000		
$\rightarrow$10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

$\delta_1(00001, 0) = \delta(q_4, 0) = \phi$

$\delta_1(00001, 1) = \delta(q_1, 1) = \phi$

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
$\rightarrow$10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

$\delta_1(00000, 0) = \phi$

$\delta_1(00000, 1) = \phi$

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
$\rightarrow$10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ
01100	ϕ	10010

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

$\delta_1(01100, 0) = \delta(q_1, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \phi$

$\delta_1(01100, 1) = \delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1) = \{q_0\} \cup \{q_3\} = \{q_0, q_3\}$

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
$\rightarrow$10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ
01100	ϕ	10010
10010	10001	01100

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

$\delta_1(10010, 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_3, 0) = \{q_4\} \cup \{q_0\} = \{q_4, q_0\}$

$\delta_1(10010, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_3, 1) = \{q_1, q_2\}$

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
$\rightarrow$10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ
01100	ϕ	10010
10010	10001	01100
*10001	00001	01100

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

$\delta_1(10001, 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_4, 0) = \{q_4\}$

$\delta_1(10001, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_4, 1) = \{q_1, q_2\}$

Definición de δ_1

$q_0q_1q_2q_3q_4$	0	1
00000	ϕ	ϕ
$\rightarrow$10000	00001	01100
*00001	ϕ	ϕ
01100	ϕ	10010
10010	10001	01100
*10001	00001	01100

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	ϕ	$\{q_0\}$
q_2	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	ϕ
$*q_4$	ϕ	ϕ

Obtenemos la cerradura: No hay más transiciones posibles

El DFA resultante

$q_0q_1q_2q_3q_4$	Nombres FA	0	1
00000	s	ϕ	ϕ
$\rightarrow$10000	$\rightarrow q_0$	00001	01100
*00001	$*p$	ϕ	ϕ
01100	r	ϕ	10010
10010	t	10001	01100
*10001	$*u$	00001	01100

Renombrando los estados

Renombrando los estados

$q_0q_1q_2q_3q_4$	Nombres FA	0	1
00000	s	$s = \phi$	$s = \phi$
$\rightarrow$10000	$\rightarrow q_0$	p = 00001	r = 01100
*00001	$*p$	$s = \phi$	$s = \phi$
01100	r	$s = \phi$	t = 10010
10010	t	u = 10001	r = 01100
*10001	$*u$	p = 00001	r = 01100

Renombrando los estados

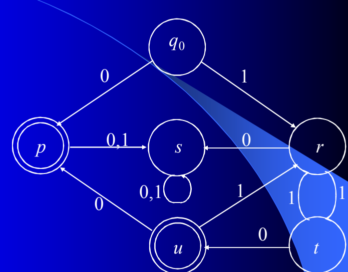
$q_0q_1q_2q_3q_4$	Nombres FA	0	1
00000	s	s	s
$\rightarrow$10000	$\rightarrow q_0$	p	r
*00001	$*p$	s	s
01100	r	s	t
10010	t	u	r
*10001	$*u$	p	r

Renombrando los estados

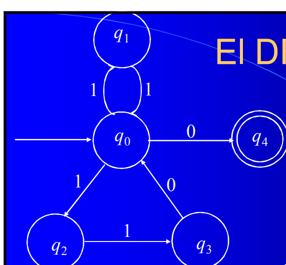
	0	1
s	s	s
$\rightarrow q_0$	p	r
$*p$	s	s
r	s	t
t	u	r
$*u$	p	r

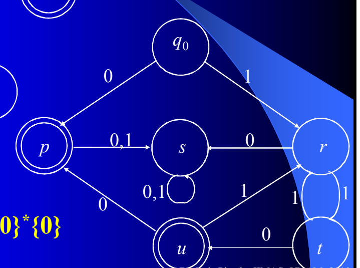
El DFA equivalente!

	0	1
s	s	s
$\rightarrow q_0$	p	r
$*p$	s	s
r	s	t
t	u	r
$*u$	p	r



El DFA equivalente!





Aceptando: **{11,110}*{0}**

Los NFAs son FAs

- M_1 acepta el mismo lenguaje que M; esto se sigue del hecho de que para cualquier $x \in \Sigma^*$

$$\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$$

- La prueba es por inducción!

Recordando δ^* para NFA

- Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ un NFA.
- La función

$\delta^*: Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

se define como sigue:

– Para todo $q \in Q$, $\delta^*(q, \Lambda) = \{q\}$

– Para todo $q \in Q$, $y \in \Sigma^*$ & $a \in \Sigma$:

$$\delta^*(q, ya) = \bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r, a)$$

Recordando la const. de subconjuntos

- M_1 se define a partir de M como sigue:
  – El conjunto de estados de M_1: $Q_1 = 2^Q$,
  – El estado inicial de M_1: $q_1 = \{q_0\}$
  – La función de transición de M_1:

Para todo $q \in Q_1$ & $a \in \Sigma$

$$\delta_1(q, a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r, a)$$

  – El conjunto de estados aceptores de M_1:

$A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \emptyset\}$

$$\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$$

- El caso base: Si $x = \Lambda$

$$\delta_1^*(q_1, x) = \delta_1^*(q_1, \Lambda)$$

$= q_1$ (por def. de δ_1^*)

$= \{q_0\}$ (por def. de q_1)

$= \delta^*(q_0, \Lambda)$ (by. def. of δ^*)

$= \delta^*(q_0, x)$

- La hipótesis inductiva:

$$\delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)$$

- Queremos probar que para toda $a \in \Sigma$,

$$\delta_1^*(q_1, xa) = \delta^*(q_0, xa)$$

- $\delta_1^*(q_1, xa) = \delta_1(\delta_1^*(q_1, x), a)$ (por def. de δ_1^*)

$= \delta_1(\delta^*(q_0, x), a)$ (por la hipótesis inductiva)

$= \bigcup_{r \in \delta^*(q_0, x)} \delta(r, a)$ (por def. de δ_1: Const. de SubConj.

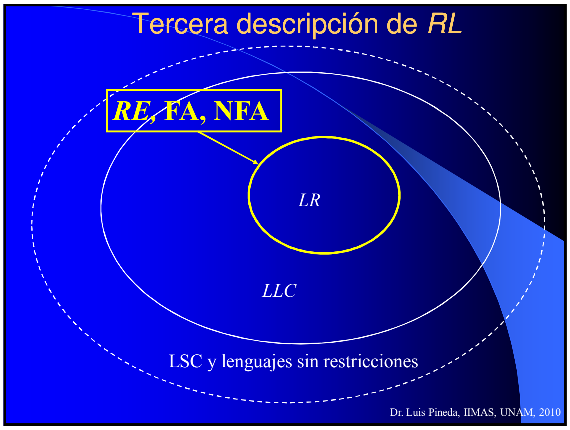
$= \delta^*(q_0, xa)$ (por def. de δ^*)

M & M_1 reconocen el mismo lenguaje

- Una cadena x se acepta por M_1 si

$$\delta_1^*(q_1, x) \in A_1$$

- lo cual es cierto si y solo si $\delta^*(q_0, x) \in A$
- este es el caso si y sólo si (por definición de A) $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \Phi$
- Por lo tanto, x se acepta por M_1 si y solo si x se acepta por M


Tercera descripción de *RL*
RE, FA, NFA
LR
LLC
LSC y lenguajes sin restricciones
Dr. Luis Pineda, IIMAS, UNAM, 2010