

# Lógica Computacional

## Nota 15. Ejemplo de deducción natural usando Coq.

Noé Salomón Hernández S.

### 1. Deducción natural usando Coq

Como ejemplo de una demostración de un seciente en lógica de predicados a través de Coq considere el código abajo descrito.

Del lado izquierdo se encuentran las directrices que el usuario le dicta al asistente de prueba. Primeramente, declaramos la propiedad en cuestión, es decir,  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow P(a) \rightarrow \exists x R(x)$ ; indicamos también que inicia la demostración con la palabra reservada **Proof**. Del lado derecho se muestra lo que Coq responde. En tal lado Coq define los elementos involucrados en la propiedad, y como conclusión escribe la fórmula a demostrar.

La ejecución se lleva a cabo paso a paso, de manera que Coq va ejecutando el código del lado izquierdo en verde y la respuesta correspondiente está a la derecha.

Para trabajar con Coq se recomienda usar una interfaz como *CoqIde*, o *proof-general* en emacs.

```
Lemma ejem :  
(forall x, P x -> Q x) /\ (forall x, Q x -> R x)  
  -> P a -> exists w, R w.  
Proof.  
intros.  
destruct H.  
apply H in H0.  
apply H1 in H0.  
exists a.  
trivial.  
Qed.
```

```
1 subgoals  
A : Type  
a : A  
b : A  
P : A -> Prop  
Q : A -> Prop  
R : A -> Prop  
----- (1/1)  
(forall x:A,P x -> Q x) /\ (forall x:A,Q x -> R x)  
  -> P a -> exists w : A, R w
```

► Introducimos las premisas con la táctica **intros**.

```
Lemma ejem :  
(forall x, P x -> Q x) /\ (forall x, Q x -> R x)  
  -> P a -> exists w, R w.  
Proof.  
intros.  
destruct H.  
apply H in H0.  
apply H1 in H0.  
exists a.  
trivial.  
Qed.
```

```
1 subgoals  
A : Type  
a : A  
b : A  
P : A -> Prop  
Q : A -> Prop  
R : A -> Prop  
H : (forall x:A, P x -> Q x) /\ (forall x:A, Q x  
  -> R x)  
H0 : P a  
----- (1/1)  
exists w : A, R w
```

► Eliminamos la conjunción en H con `destruct H`.

```
Lemma ejem :
(forall x, P x -> Q x) /\ (forall x, Q x -> R x)
  -> P a -> exists w, R w.
Proof.
intros.
destruct H.
apply H in H0.
apply H1 in H0.
exists a.
trivial.
Qed.
```

```
1 subgoals
A : Type
a : A
b : A
P : A -> Prop
Q : A -> Prop
R : A -> Prop
H : forall x : A, P x -> Q x
H1 : forall x : A, Q x -> R x
H0 : P a
----- (1/1)
exists w : A, R w
```

► Con la táctica `apply H in H0`. instanciamos H con a obteniendo  $P\ a \rightarrow Q\ a$ , y hacemos *modus ponens* de esto último con la fórmula en H0.

```
Lemma ejem :
(forall x, P x -> Q x) /\ (forall x, Q x -> R x)
  -> P a -> exists w, R w.
Proof.
intros.
destruct H.
apply H in H0.
apply H1 in H0.
exists a.
trivial.
Qed.
```

```
1 subgoals
A : Type
a : A
b : A
P : A -> Prop
Q : A -> Prop
R : A -> Prop
H : forall x : A, P x -> Q x
H1 : forall x : A, Q x -> R x
H0 : Q a
----- (1/1)
exists w : A, R w
```

► Con `apply H1 in H0`. instanciamos H1 obteniendo  $Q\ a \rightarrow R\ a$ , y aplicamos *modus ponens* a esto último con la fórmula en H0.

```
Lemma ejem :
(forall x, P x -> Q x) /\ (forall x, Q x -> R x)
  -> P a -> exists w, R w.
Proof.
intros.
destruct H.
apply H in H0.
apply H1 in H0.
exists a.
trivial.
Qed.
```

```
1 subgoals
A : Type
a : A
b : A
P : A -> Prop
Q : A -> Prop
R : A -> Prop
H : forall x : A, P x -> Q x
H1 : forall x : A, Q x -> R x
H0 : R a
----- (1/1)
exists w : A, R w
```

► Nos fijamos que para la conclusión debemos aplicar la regla de introducción del cuantificador existencial, la cual nos pide que la fórmula  $R\ w$  se cumpla para algún valor. Nosotros afirmamos que ese valor buscado es  $a$  con la táctica `exists a`.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre> <b>Lemma</b> ejem :   (<b>forall</b> x, P x -&gt; Q x) /\ (<b>forall</b> x, Q x -&gt; R x)   -&gt; P a -&gt; exists w, R w. <b>Proof.</b> <b>intros.</b> <b>destruct</b> H. <b>apply</b> H <b>in</b> H0. <b>apply</b> H1 <b>in</b> H0. <b>exists</b> a. <b>trivial.</b> <b>Qed.</b> </pre> | <pre> 1 subgoals A : Type a : A b : A P : A -&gt; Prop Q : A -&gt; Prop R : A -&gt; Prop H : forall x : A, P x -&gt; Q x H1 : forall x : A, Q x -&gt; R x H0 : R a ----- (1/1) R a </pre> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

► Basta ahora demostrar que es cierto  $R\ a$ . Vemos que ya se tiene como hipótesis, así  $R\ a$  se cumple trivialmente. Esto lo indicamos con la táctica `trivial`.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| <pre> <b>Lemma</b> ejem :   (<b>forall</b> x, P x -&gt; Q x) /\ (<b>forall</b> x, Q x -&gt; R x)   -&gt; P a -&gt; exists w, R w. <b>Proof.</b> <b>intros.</b> <b>destruct</b> H. <b>apply</b> H <b>in</b> H0. <b>apply</b> H1 <b>in</b> H0. <b>exists</b> a. <b>trivial.</b> <b>Qed.</b> </pre> | <pre> No more subgoals. </pre> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|

► No hay más que demostrar. Hemos terminado la prueba, pero debemos darle el comando `Qed`. para que Coq extraiga un término de prueba, vuelva a la interacción con Coq a alto nivel y ligue el término de la prueba con la meta original.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| <pre> <b>Lemma</b> ejem :   (<b>forall</b> x, P x -&gt; Q x) /\ (<b>forall</b> x, Q x -&gt; R x)   -&gt; P a -&gt; exists w, R w. <b>Proof.</b> <b>intros.</b> <b>destruct</b> H. <b>apply</b> H <b>in</b> H0. <b>apply</b> H1 <b>in</b> H0. <b>exists</b> a. <b>trivial.</b> <b>Qed.</b> </pre> | <pre> ejem is defined </pre> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|