Ejemplo de aplicación del Álgebra de Conjuntos a la teoría elemental de Probabilidad

por Carlos Velarde V.

Octubre de 1993

Este trabajo se preparó como material complementario para la primera unidad —Lógica y Conjuntos— del curso de Álgebra que se imparte en la Facultad de Química. Se trata de un extracto de los primeros dos capítulos del libro de Kai Lai Chung [1], donde se pueden consultar el desarrollo completo y muchos otros ejemplos similares.

Comencemos presentando algo de la terminología usada en la Teoría de Probabilidad. En esta materia, al conjunto que en Álgebra de Conjuntos se denomina *universo de discurso* se le llama *espacio de muestreo* y se acostumbra denotar mediante el símbolo Ω. A cada elemento se les llama *punto de muestra* (o simplemente *muestra*) y a cada subconjunto de Ω se le designa *evento*. Esta terminología está inspirada en el uso que se da a los conjuntos dentro de esa materia. Por ejemplo, imagine que participa en una rifa para la que se han vendido 10 boletos, de los cuales usted ha comprado los numerados 3, 5 y 8, y que el sorteo se realizará extrayendo una bola de una urna conteniendo una bola por cada boleto, marcadas del 1 al 10. El espacio de muestreo será el conjunto de bolas de la urna, que bien podemos representar mediante $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. El sorteo consiste en extraer una bola —es decir, una muestra— y el evento deseado por usted es que la muestra seleccionada pertenezca al conjunto $\{3, 5, 8\}$ (a este conjunto también se le suele llamar *de casos favorables al evento*).

La noción clásica de *probabilidad* surge de considerar ejemplos como el anterior y se basa en el concepto de *proporción*. De los diez casos posibles tres son favorables para usted, es decir, la proporción de casos favorables respecto al total de de casos es $\frac{3}{10}$; suponiendo que cada una de las bolas tiene la misma posibilidad de ser extraída, este número es una medida de las posibilidades que usted tiene para ganar la rifa. De ahí que la *probabilidad* de un evento A, en su forma más simple, cuando cada punto de muestra tiene la misma oportunidad de ser elegido y Ω es finito, se defina así:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{1}$$

Algunas consecuencias inmediatas de esta definición son:

$$P(\Omega) = 1, \tag{2}$$
$$P(\emptyset) = 0, \tag{3}$$
$$0 \leq P(A) \leq 1, \tag{4}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{5}$$

(esta sale de $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, dividiendo ambos miembros entre $|\Omega|$).

Consecuencia de (3) y (5) es:

$$A \cap B = \emptyset \quad \longrightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{6}$$

Recordando que $A \cap \overline{A} = \emptyset$ y que $A \cup \overline{A} = \Omega$, haciendo uso de (6) y (2) se obtiene:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{7}$$

Ejemplo 1. Si se lanzan 3 dados, ¿cuál es la probabilidad de que todas las caras mostradas sean distintas?

Aquí, $\Omega = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6, 1 \leq z \leq 6\}$, y $|\Omega| = 6^3$. Si A es el evento de casos en que las caras son distintas, tenemos que $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4$ (abreviaremos este producto de 3 números sucesivos, decrecientes a partir de 6, mediante $(6)_3$ y, en general, $(m)_n$ representará al producto de n números sucesivos, decrecientes a partir de m, con $n \leq m$). Entonces

$$P(A) = \frac{(6)_3}{6^3} = \frac{120}{216} \approx 0.555$$

Ejemplo 2. Si se lanzan n dados ($n \leq 6$), ¿cuál es la probabilidad de que todas las caras mostradas sean distintas?

Ahora $|\Omega| = 6^n$ y $|A| = (6)_n$, por lo que $P(A) = \dfrac{(6)_n}{6^n}$.

Ejemplo 3. Si se lanzan n dados de m caras ($n \leq m$), ¿cuál es la probabilidad de que todas las caras mostradas sean distintas?

Aquí, $|\Omega| = m^n$, $|A| = (m)_n$, y entonces $P(A) = \dfrac{(m)_n}{m^n}$.

Ejemplo 4. ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de n personas haya al menos dos con el mismo día de cumpleaños?

Conviene calcular primero la probabilidad del evento complementario, o sea el de los casos en que no haya dos personas con la misma fecha de cumpleaños, ya que, abstrayendo un poco, este problema es equivalente al de calcular la probabilidad de que al lanzar n dados de 365 caras todas las caras mostradas sean distintas. Pero de acuerdo al resultado obtenido en el ejemplo 3, esta probabilidad es $\frac{(365)_n}{365^n}$, por lo que, aplicando la fórmula (7), obtenemos:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{(365)_n}{365^n}.$$

La tabla siguiente muestra valores de $P(A)$ para algunos valores de n:

n	5	10	15	20	21	22	23	24	25	30	35	40	45	50	55
$1 - \frac{(365)_n}{365^n}$	.03	.12	.25	.41	.44	.48	.51	.54	.57	.71	.81	.89	.94	.97	.99

Bibliografía

[1] Kai Lai Chung *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes* Springer-Verlag, 1974.