Curso de Álgebra (2000) – Facultad de Química, UNAM

Ejercicios para la unidad 4 (Polinomios y teoría de ecuaciones)

por Carlos Velarde V.

Este módulo versa sobre el problema de resolver en $\mathbb{C}$ ecuaciones de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,, \tag{1}$$

dados los *coeficientes* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.
A la expresión algebraica que aparece en lado izquierdo de (1),

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,, \tag{2}$$

se le llama *polinomio* en x con coeficientes en $\mathbb{C}$. Al valor mayor de k tal que $a_k \neq 0$ se le llama el *grado* del polinomio; en caso de que todos los coeficientes sean cero el grado no se define, es decir, al polinomio 0 no se le asigna grado alguno. Así, si $a_n \neq 0$ el polinomio es de grado n —y se dice que (1) es una ecuación polinomial de grado n—, $5x^4 - ix$ es de grado 4 y $2-i$ es de grado 0. Vistos como polinomios, a los elementos de $\mathbb{C}$ se les llama polinomios *constantes.*
Asociada a (2) se define la función *polinomial* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,. \tag{3}$$

Puesto que el plano $\mathbb{C}$ es de dimensión 2, estas funciones no se pueden graficar en el plano cartesiano en la forma acostumbrada para las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sin embargo, representando por separado al dominio y al codominio de f, es posible obtener interpretaciones gráficas como la siguiente:

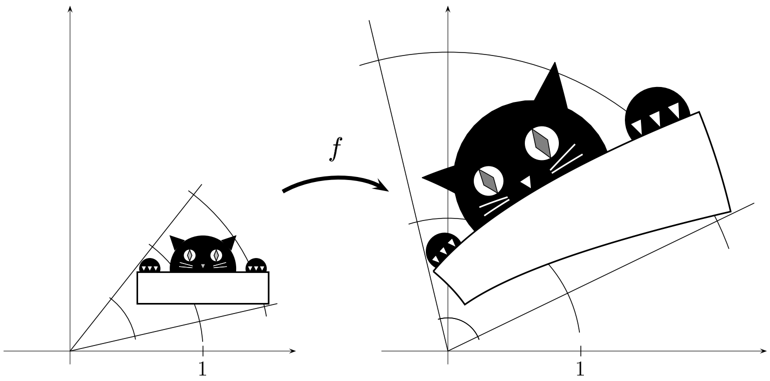
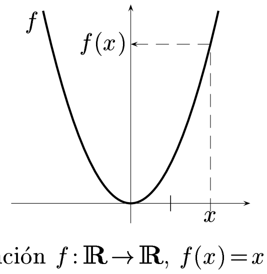


Ilustración de la manera en que el plano complejo es transformado por la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x^2$.

Si el polinomio es de coeficientes en $\mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tendrá que $f(x) \in \mathbb{R}$, obteniéndose así una función $f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (llamada *restricción* de f a $\mathbb{R}$), la que se puede graficar en la forma usual, como se ilustra a continuación para la función de la figura anterior. (Abusando de la notación, se acostumbra escribir f en vez de $f|_{\mathbb{R}}$.)

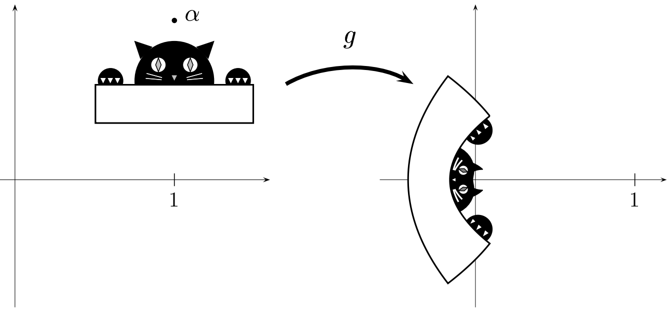


Gráfica de las función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, la restricción a $\mathbb{R}$ de la función presentada en la figura anterior.

El problema de resolver (1) es equivalente al de encontrar los valores de x para los que $f(x)$ vale 0, es decir,

$$\alpha \text{ es solución de (1)} \quad \leftrightarrow \quad f(\alpha) = 0\,.$$

Si $f(\alpha) = 0$, se dice que α es un *cero* de f, o bien que f se anula en α. En la siguiente figura se ilustra este concepto:



El punto $\alpha = 1 + i$ es un cero de la función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(x) = x^2 - 2(1+i)x + 2i$. Es el único punto en que g se anula (ejercicio **1.d**). Obsérvese que al restringir g a $\mathbb{R}$ <u>no</u> se obtiene una función de codominio $\mathbb{R}$.

Consideremos la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0).$$

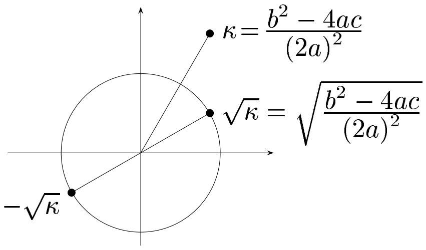
La conocida fórmula usada para resolver la ecuación cuando sus coeficientes pertenecen a $\mathbb{R}$, también sirve si $a, b, c \in \mathbb{C}$ y se construye de manera similar, veamos cómo. Primero se divide entre a y se suma y resta la constante apropiada para que con los términos en x se forme el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0\,;$$

con esto, la igualdad se puede reescribir así:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\,.$$

Esta ecuación es de la forma $z^2 = \kappa$, con $z = x + b/(2a)$ y $\kappa = (b^2 - 4ac)/(2a)^2$. Sabemos que κ tiene dos raíces cuadradas, $\sqrt{\kappa}$ (la principal) y $-\sqrt{\kappa}$, como se puede apreciar en la figura:



Entonces $z = \pm\sqrt{\kappa} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}/(2a)$, o sea que $x + b/(2a) = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}/(2a)$. Despejando a x se obtiene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Para $p \in \mathbb{C}$, $\sqrt{p}$ denota la raíz cuadrada <u>principal</u> de p (en general, $\sqrt[n]{p}$ denota la raíz n-ésima principal de p). De acuerdo con esto, los números $\sqrt{pq}$ y $\sqrt{p}\sqrt{q}$ pueden diferir (nada más) en el signo, es decir, ser uno el inverso aditivo del otro. Por ejemplo, $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ pero $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i\,i = -1$. En todo caso, $\sqrt{b^2 - 4ac}/(2a)$ es una de las dos raíces cuadradas de κ, porque $\sqrt{(2a)^2}$ es $2a$ ó $-2a$.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

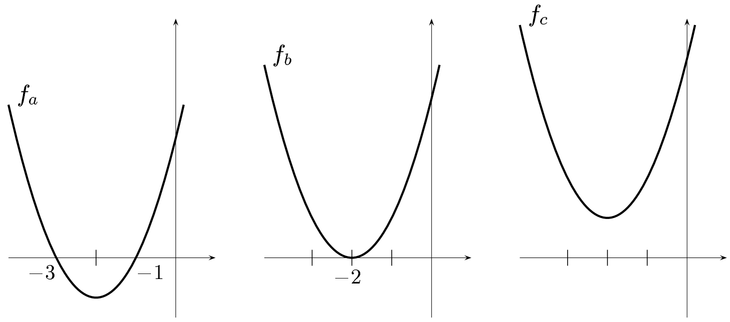
a) $x^2 + 4x + 3 = 0$
b) $x^2 + 4x + 4 = 0$
c) $x^2 + 4x + 5 = 0$
d) $x^2 - 2(1+i)x + 2i = 0$
e) $x^2 + 2x + 1 + i = 0$
f) $8x^2 + 4(1+i)x + 1 + (1-\sqrt{3})i = 0$

Solución:

a) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -1 \\ -3\,. \end{cases}$

b) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2$ (de multiplicidad dos).

c) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i\,.$



Gráfica de las funciones polinomiales $f_a, f_b, f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asociadas a las ecuaciones **1.a,b,c**, $f_a(x) = x^2 + 4x + 3$, $f_b(x) = x^2 + 4x + 4$ y $f_c(x) = x^2 + 4x + 5$.

d) $x = \dfrac{2(1+i) \pm \sqrt{4(1+i)^2 - 8i}}{2} = 1+i$ (de multipl. dos).

e) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1+i)}}{2} = -1 \pm \sqrt{-i} =$

$$= -1 \pm \big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\big) = \begin{cases} \big(-1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i \\[2ex] \big(-1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\,. \end{cases}$$

f) $x = \frac{1}{16}\Big(-4(1+i) \pm \sqrt{16(1+i)^2 - 32\big(1 + (1-\sqrt{3})i\big)}\,\Big) =$

$$= \tfrac{1}{4}\Big(-1 - i \pm \sqrt{(1+2i-1) - 2(1+i-\sqrt{3}i)}\,\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\big(-1 - i \pm \sqrt{-2+2\sqrt{3}i}\,\big) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\big(-1 - i \pm (1+\sqrt{3}i)\big) =$$
$$\begin{cases} \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{3})i \\[2ex] \tfrac{1}{4}\big(-2 + (-1-\sqrt{3})i\big)\,. \end{cases}$$

Dados dos números $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{C}$, sin dificultad se puede probar la siguiente propiedad de la multiplicación de números complejos:

$$\kappa_1\kappa_2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \kappa_1 = 0 \ \vee\ \kappa_2 = 0\,.$$

De esta bicondicional se sigue que si $p_1(x)$ y $p_2(x)$ denotan respectivos polinomios, entonces

$$p_1(x)\,p_2(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad p_1(x) = 0 \ \vee\ p_2(x) = 0\,.$$

Este resultado da la clave para resolver ecuaciones como la del lado izquierdo de la bicondicional, resolviendo por separado las ecuaciones que aparecen en el lado derecho.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 4) = 0$
b) $(x^2 + 4x + 4)(x^2 + 4x - 8)(x^2 + 2x + 1 + i) = 0$
c) $(x-2)(x-i)(x-(1+i)) = 0$
d) $(x-2)^3(x-i)^2(x-(1+i))^5 = 0$

Solución:

a) Las soluciones son las obtenidas en **1.a** y **1.b**.

b) Las obtenidas en **1.b**, **1.c** y **1.e**.

c) 2, i y $1+i$.

d) 2, i y $1+i$ (de multiplicidad 3, 2 y 5, respectivamente).

Sea $\mathcal{P}[x]$ el conjunto de polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}$. Las operaciones de suma y multiplicación de polinomios de $\mathcal{P}[x]$ se efectúan en la misma forma que sabemos hacerlo con los de coeficientes en $\mathbb{R}$, recurriendo ahora a la aritmética de $\mathbb{C}$, obteniendo polinomios como resultado. (Ejercicio: pruebe que $\mathcal{P}[x]$ junto con dichas operaciones satisfacen las propiedades de campo, con excepción de **m4**.)
Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios, $p(x)+q(x)$ es 0 ó de grado no mayor al máximo de los grados de los sumandos; además, si los polinomios son distintos de 0, entonces $p(x)q(x)$ es de grado igual a la suma de los grados de los factores.

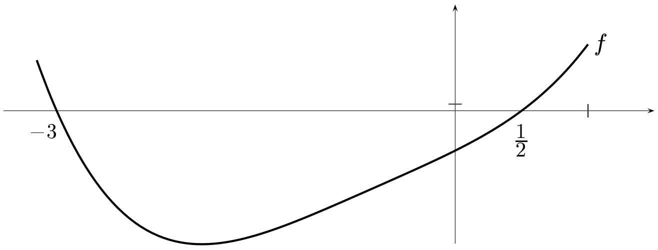
3. Efectúe las siguientes multiplicaciones, dando el resultado en la forma $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$:

a) $(x-2i)(x+2i)(x+3)(x-(1/2))$
b) $(x-(2+i))(x-(2-i))(x+2)(x-(1/3))$

Solución:

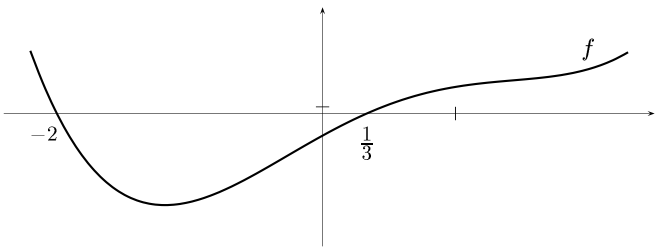
a) $x^4 + (5/2)x^3 + (5/2)x^2 + 10x - 6\,.$

Como los coeficientes están en $\mathbb{R}$, queda definida la función asociada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la que se anula en -3 y $1/2$, las raíces en $\mathbb{R}$ del polinomio, lo que se puede apreciar en la figura:



Gráfica de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + (5/2)x^3 + (5/2)x^2 + 10x - 6$.
(La unidad vertical es 1/20 de la horizontal.)

b) $x^4 - (7/3)x^3 - (7/3)x^2 + 11x - (10/3)\,.$



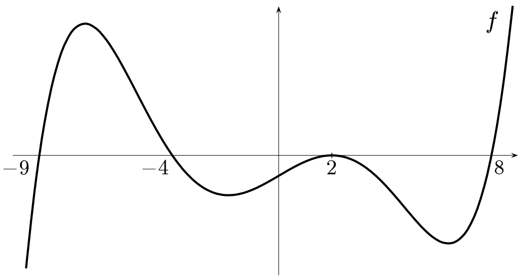
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - (7/3)x^3 - (7/3)x^2 + 11x - (10/3)$.

4. Efectúe las siguientes multiplicaciones, dando el resultado en la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$:

a) $(x+9)(x+4)(x-2)^2(x-8)$
b) $(x-1)^3(x-i)^2$
c) $2x^3(x+2)(x+(1+i))^2$

<u>Solución:</u>

a) $x^5 + x^4 - 84x^3 + 4x^2 + 880x - 1152$.



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^4-84x^3+4x^2+880x-1152$. La gráfica de f corta al eje horizontal en las raíces de multiplicidad non y es tangente a él en la de multiplicidad par. (La unidad vertical es 1/1500 de la horizontal.)

b) $x^5 + (-3-2i)x^4 + (2+6i)x^3 + (2-6i)x^2 + (-3+2i)x + 1$.

c) $2x^6 + (8+4i)x^5 + (8+12i)x^4 + 8ix^3$.

Los dos últimos ejercicios ilustran como se pueden construir polinomios de grado n efectuando multiplicaciones de la forma

$$a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\,, \tag{4}$$

de tal suerte que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son precisamente las raíces del polinomio resultante. Éstas no tienen que ser distintas, si una raíz ocurre m veces, se dice que es de *multiplicidad* m. A (4) se le llama *forma completamente factorizada* del polinomio obtenido. Inmediatamente surge la pregunta: ¿todo polinomio de grado mayor que cero, de la forma (2), se puede escribir en la forma (4)? La respuesta es <u>sí</u>, y se obtiene a partir del Teorema Fundamental del Álgebra y otros resultados acerca de la factorización de polinomios que presentaremos enseguida. Siendo así, el problema de resolver (1) resulta equivalente al de obtener la forma (4) a partir de (2).

Teorema (Algoritmo de la división). Sean $a(x), b(x) \in \mathbb{C}$, con $b(x) \neq 0$. Entonces existen polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que

$$a(x) = c(x)b(x) + r(x)\,, \tag{5}$$

en que $r(x)$ es 0 ó de grado menor que el de $b(x)$.

Si $a(x)$ es 0 ó de grado menor al de $b(x)$, resulta evidente que $a(x) = 0\,b(x) + a(x)$. En caso contario, el resultado se prueba por inducción sobre el grado de $a(x)$ (par una prueba completa consultar el libro de Marie J. Weiss). De la demostración se deriva el siguiente procedimiento para construir el *cociente* $c(x)$ y el *residuo* $r(x)$. A la manera del esquema usado para dividir números enteros, se escriben $a(x)$ como dividendo y $b(x)$ como divisor y se procede a construir el cociente y el residuo; al final éstos quedan en la parte superior e inferior del esquema siguiente, respectivamente:

$$\begin{array}{r|l}
 & c_1(x) + c_2(x) + \cdots + c_m(x) \\ \cline{2-2}
b(x) & a(x) \\
 & \underline{c_1(x)b(x)} \\
 & a(x) - c_1(x)b(x) \\
 & \underline{c_2x^{m-1}b(x)} \\
 & a(x) - c_1(x)b(x) - c_2(x)b(x) \\
 & \ddots \\
 & \underline{c_m(x)b(x)} \\
 & a(x) - c_1(x)b(x) - c_2(x)b(x) - \cdots - c_m(x)b(x)
\end{array}$$

Cada etapa consiste en construir un término de $c(x)$ y una parte del residuo. En la primera etapa, se forma $c_1(x)$ de tal manera que el término de mayor grado en $a(x)$ se cancele en $a(x) - c_1(x)b(x)$. Con este polinomio fungiendo como nuevo dividendo, el proceso se repite tantas veces como se requiera para que $a(x) - c_1(x)b(x) - c_2(x)b(x) - \cdots - c_m(x)b(x)$ sea 0 ó de grado menor al del divisor. Además se tendrá que

$$r(x) = a(x) - c_1(x)b(x) - c_2(x)b(x) - \cdots - c_m(x)b(x)\,,$$

ecuación equivalente a (5). El siguiente ejemplo ilustra este algoritmo:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & & & & 3x^4 & & -x^2 & & +3 \\ \cline{2-9}
2x^3+x^2-2 & 6x^7 & +3x^6 & -2x^5 & -7x^4 & +6x^3 & +6x^2 & +0x & -2 \\
 & 6x^7 & +3x^6 & & -6x^4 & & & & \\ \cline{2-5}
 & & & -2x^5 & -x^4 & +6x^3 & +6x^2 & +0x & -2 \\
 & & & -2x^5 & -x^4 & & +2x^2 & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & +6x^3 & +4x^2 & +0x & -2 \\
 & & & & & +6x^3 & +3x^2 & & -6 \\ \cline{6-9}
 & & & & & & x^2 & & +4
\end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &6x^7 + 3x^6 - 2x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2 \\ &\qquad = (3x^4 - x^2 + 3)(2x^3 + x^2 - 2) + (x^2 + 4)\,. \end{aligned}$$

En caso de que el residuo sea 0, se tendrá una factorización de $a(x)$:

$$a(x) = c(x)b(x)\,.$$

Considerando el caso particular en que el divisor es $x - \alpha$ se obtienen en serie los dos corolarios siguientes:

Teorema (del residuo). El residuo obtenido al dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$ es igual a $p(\alpha)$.

Esto es así porque el divisor es de grado 1, entonces el residuo tiene que ser constante, digamos r, y como sabemos que se cumple la igualdad

$$p(x) = c(x)(x-\alpha) + r\,,$$

al sustituir en ésta α por x se obtiene $p(\alpha) = r$.

Teorema (del factor). $x - \alpha$ es factor de $p(x) \;\leftrightarrow\; p(\alpha) = 0$.

El hecho de que una ecuación tan simple como $x^2 + 1 = 0$ no tenga soluciones en $\mathbb{R}$ motivó en gran medida la invención de los números complejos, obteniéndose así soluciones para esa y otras ecuaciones. El siguiente teorema nos dice que no se presentará una situación similar al resolver en $\mathbb{C}$ ecuaciones polinomiales.

Teorema Fundamental del Álgebra. Toda ecuación (1) de grado $n > 0$ tiene al menos una solución en $\mathbb{C}$.
(En otras palabras, si $p(x) \in \mathcal{P}[x]$ es de grado positivo, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.)

Mediante un argumento inductivo apoyado en los dos últimos teoremas se obtiene que si (2) es de grado $n > 0$, entonces tiene n raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (no necesariamente distintas) y

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

Las soluciones de ecuaciones polinomiales de grado menor que 5 se pueden obtener a partir de los coeficientes mediante fórmulas algebraicas, sin embargo, en la primera mitad del siglo XIX se demostró que no existen fórmulas similares que den las soluciones de la ecuación general de grado 5 o mayor. Ante esta situación, se desarrollan métodos especiales para ayudar a encontrar o aproximar las soluciones. Estos métodos se apoyan en teoremas como los siguientes, dirigidos a la búsqueda de soluciones de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Teorema 1. Sea $p(x)$ de coeficientes en $\mathbb{Z}$ y $(a/b) \in \mathbb{Q}$ (a y b sin factor común). Entonces

$$p(a/b) = 0 \quad \to \quad (a \text{ divide a } a_0) \wedge (b \text{ divide a } a_n).$$

Debido a esto, las raíces racionales deben buscarse tan solo en un conjunto finito de elementos de $\mathbb{Q}$. En particular (para $b = 1$), las raíces enteras sólo deben buscarse en el conjunto de divisores del término constante.

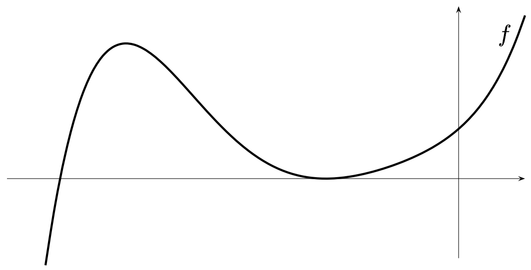
Teorema 2. Sea $p(x)$ de coeficientes en $\mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces

$$p(z) = 0 \quad \leftrightarrow \quad p(\overline{z}) = 0\,.$$

Ésto nos dice que si encontramos una raíz en $\mathbb{C}$, de gratis sabremos que $\overline{z}$ también es raíz.
Los teoremas siguientes conviene formularlos en términos de funciones, para facilitar su interpretación geométrica.

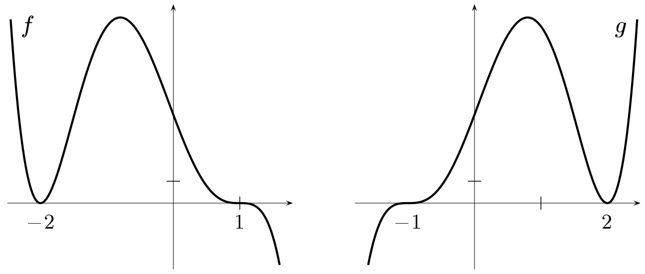
Teorema 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función polinomial de grado mayor que 0; si sus coeficientes (distintos de 0) son todos del mismo signo, entonces f no tiene ceros positivos.

Teorema 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función polinomial de grado impar, entonces se anula en al menos un punto.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 15x + 9$. Como todos los coeficientes son del mismo signo, la gráfica de f no tiene punto en común con el lado derecho del eje horizontal. Además, por ser f de grado impar, necesariamente corta al eje horizontal. (La escala vertical es 1/8 de la horizontal.)

Teorema 5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función polinomial de grado mayor que cero. Los ceros de f son los los inversos aditivos de los ceros de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$.



$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = -x^5 - x^4 + 5x^3 + x^2 - 8x + 4$ y $g(x) = f(-x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$. Al reflejar en el eje vertical cualquiera de las gráficas se obtiene la otra.

Para resolver ecuaciones polinomiales de coeficientes en $\mathbb{R}$, conviene seguir métodos del tipo siguiente. Recurriendo a teoremas como los anteriores, buscar primero entre las posibles soluciones enteras, después entre las propiamente fraccionarias, continuar con las irracionales (encontrar éstas es difícil, por lo general se recurre a métodos de interpolación para aproximarlas, basados unos en la continuidad y otros en la diferenciabilidad de las funciones polinomiales) y por último buscar las soluciones propiamente complejas.
Para averiguar si un número α es solución de una ecuación polinomial de grado n, digamos $p(x) = 0$, conviene proceder dividiendo $p(x)$ entre $x - \alpha$. Si el residuo resulta 0, por el Teorema del residuo tendremos que α es solución de la ecuación, pero además habremos obtenido el polinomio $p_1(x)$ tal que $p(x) = (x - \alpha)p_1(x)$, por lo que las demás soluciones de la ecuación original deberán ser las soluciones de la ecuación *reducida* $p_1(x) = 0$ de grado $n-1$. Entonces se procede a resolver ésta como si fuera el problema original, pero tomando en cuenta información acumulada, por ejemplo no revisando de nuevo posibles soluciones previamente descartadas. Eventualmente se obtendrá una ecuación de grado 1, de resolución inmediata. (Alternativamente, cuando la ecuación reducida sea de grado 4, 3 ó 2, se puede aplicar la respectiva fórmula para resolverla.)

Aunque la división de un polinomio de la forma (2) entre $x-\alpha$ puede efectuarse usando el esquema antes presentado, es mejor organizarla de la siguiente manera.
Si $c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1x + c_0$ es el cociente (polinomio de grado n–1) y r el residuo (constante), sabemos que se cumple la igualdad

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \\ (x - \alpha)\,(c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1x + c_0) + r\,,$$

o sea, efectuando las operaciones del lado derecho y agrupando,

$$\begin{aligned} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 &= \\ c_{n-1}x^n + (c_{n-2} - c_{n-1}\alpha)x^{n-1} &+ \\ &\cdots \\ &+ (c_0 - c_1\alpha)x + (r - c_0\alpha)\,; \end{aligned}$$

como los coeficientes del lado izquierdo deben ser iguales a los del lado derecho, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$c_{n-1} = a_n,\ c_{n-2} = a_{n-1} + c_{n-1}\alpha, \ldots, c_0 = a_1 + c_1\alpha,\ r = a_0 + c_0\alpha$$

Estas igualdades permiten determinar sucesivamente los coeficientes del cociente y el residuo, a partir de los coeficientes de (2) y α. Este cálculo se puede organizar en la forma presentada a continuación, conocida como *división sintética*:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \alpha \\ & c_{n-1}\alpha & \ldots & c_1\alpha & c_0\alpha & \\ \hline c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 & r & \end{array}$$

Se comienza escribiendo los datos $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ y α. Entonces se procede a calcular los elementos del último renglón, de izquierda a derecha, de la siguiente manera: En la posición de c_{n-1} se copia a_n; en el segundo renglón de la segunda columna se forma el producto $c_{n-1}\alpha$ y se suma a a_{n-1}, determinándose así c_{n-2}, se repite esta manera de multiplicar y sumar, hasta completar la última columna.

Resuelva las siguientes ecuaciones:

5. $3x^5 - 5x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 24x + 8 = 0$
Solución:
Soluciones posibles en $\mathbb{Z}$: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8.

$$\begin{array}{cccccc|c} 3 & -5 & -8 & -2 & 24 & 8 & 1 \\ & 3 & -2 & -10 & -12 & 12 & \\ \hline 3 & -2 & -10 & -12 & 12 & 20 & ✘ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 3 & -5 & -8 & -2 & 24 & 8 & -1 \\ & -3 & 8 & 0 & 2 & -26 & \\ \hline 3 & -8 & 0 & -2 & 26 & -18 & ✘ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 3 & -5 & -8 & -2 & 24 & 8 & 2 \\ & 6 & 2 & -12 & -28 & -8 & \\ \hline 3 & 1 & -6 & -14 & -4 & 0 & \checkmark \end{array}$$

Ecuación reducida: $3x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 4 = 0$.
Soluciones posibles en $\mathbb{Z}$: ± 1, ± 2, ± 4. Eliminamos 1 y -1 porque ya sabemos que no son soluciones de la ecuación original; probemos con 2:

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -6 & -14 & -4 & 2 \\ & 6 & 14 & 16 & 4 & \\ \hline 3 & 7 & 8 & 2 & 0 & \checkmark \end{array}$$

Ecuación reducida: $3x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = 0$.
Por ser de coeficientes no negativos, no tiene soluciones positivas; esto deja sólo a -2 como posible solución entera, averigüemos si lo es:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 8 & 2 & -2 \\ & -6 & -2 & -12 & \\ \hline 3 & 1 & 6 & -10 & \times \end{array}$$

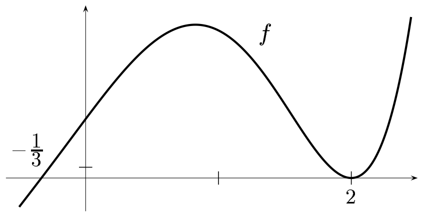
Esto muestra que -2 no es solución. Pasemos a buscar soluciones en $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$; las posibles son $\pm 1/3$ y $\pm 2/3$, pero sabemos que no puede haber soluciones positivas, lo que deja a $-1/3$ y $-2/3$ como posibles soluciones, probemos si la primera lo es:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 8 & 2 & -1/3 \\ & -1 & -2 & -2 & \\ \hline 3 & 6 & 6 & 0 & \checkmark \end{array}$$

Ecuación reducida: $x^2 + 2x + 2 = 0$.
Siendo de segundo grado, la resolvemos mediante la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Hemos encontrado que las soluciones son: 2 (de multiplicidad dos), $-1/3$, $-1+i$ y $-1-i$.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3(x-2)^2(x+1/3)(x^2+2x+2)$. (La escala vertical es 1/12 de la horizontal.

6. $3x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 33x - 10 = 0$

7. $2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 2x - 4 = 0$

8. $3x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 4 = 0$

9. Factorice completamente $3x^5 - 5x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 24x + 8$.
Solución: Este polinomio tiene por raíces las soluciones de la ecuación del ejercicio 5, entonces su forma factorizada es

$$3\,(x-2)^2\left(x + \frac{1}{3}\right)\big(x - (-1+i)\big)\big(x - (-1-i)\big)\,.$$

10. Compruebe que $-1+i$ es solución de la siguiente ecuación y obtenga las demás soluciones.

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 22x + 20 = 0\,.$$

Solución:

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 & 22 & 20 & -1+i \\ & -1+i & -2 & -1+i & -12+10i & -20 & \\ \hline 1 & 1+i & 1 & 11+i & 10+10i & 0 & \checkmark \end{array}$$

$\overline{-1+i} = -1-i$ también debe ser solución:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1+i & 1 & 11+i & 10+10i & -1-i \\ & -1-i & 0 & -1-i & -10-10i & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 10 & 0 & \checkmark \end{array}$$

Las otras soluciones se obtienen como en los ejercicios anteriores.