EXAMEN: P1. Posgrado en C. e Ing. de la Computación, 25 de noviembre de 1999.

PROFESOR: Carlos Velarde

MATERIA: Autómatas y Lenguajes Formales

NOMBRE DEL ALUMNO: ______________________________
APELLIDO(S) Nombre(s)

1. Pruebe que si L es un lenguaje regular, entonces $\{w \in L : |w| \text{ es par}\}$ es lenguaje regular.

2. Pruebe que si L es un lenguaje regular y $\lambda \notin L$, entonces hay algún autómata finito no determinístico M con solo un estado de aceptación y tal que $L = L(M)$.

3. Dé una gramática regular G tal que $L(G) = L(\,(x+y)^* + y^*z^*\,)$.

4. Describa un algoritmo para construir, a partir de una expresión regular r, un diagrama de transiciones de un autómata finito M tal que $L(M) = L(r)$. Mediante el algoritmo trate la expresión $(x+y)^* + y^*z^*$.

5. Pruebe que las gramáticas lineales izquierdas (aquellas cuyas producciones son de la forma $N \to Mx$ ó $N \to \lambda$) generan a los lenguajes regulares.

1. Sea Σ el alfabeto. El conjunto Σ, siendo finito, es lenguaje regular. De aquí se sigue que Σ^2 (el conjunto de palabras de longitud 2) y $(\Sigma^2)^\star$ (el conjunto de palabras de longitud par) son regulares. Entonces $\{w \in L : |w| \text{ es par}\} = L \cap (\Sigma^2)^\star$, siendo la intersección de dos lenguajes regulares, es regular.

---

2. Como L es regular, existe algún autómata finito $M = (S, \Sigma, \rho, \iota, F)$ tal que $L(M) = L$. Como $\lambda \notin L$, el estado inicial de M no es de aceptación. Sea n el número de estados de aceptación de M y supongamos que $n \neq 1$. A partir de M se construye un a.f. $M' = (S', \Sigma, \rho', \iota, F')$ con un solo estado de aceptación de la siguiente manera:

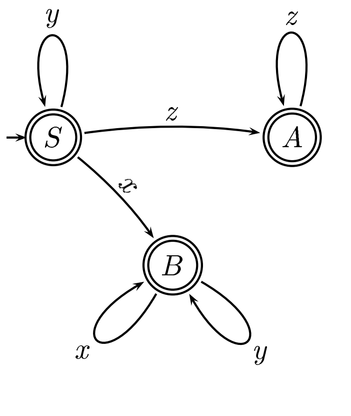
$$\begin{aligned} &S' = S \cup \{f\} \quad (f \notin S) \\ &\rho' = \rho \cup \{(p, x, f) : (p, x, q) \in \rho, q \in F\} \\ &F' = \{f\} \end{aligned}$$

Dicho en palabras: Se agrega un nuevo estado f; por cada arco (p, x, q) incidente en alguno de los estados de aceptación de M se agrega un arco (p, x, f), con la misma etiqueta y nodo de salida pero incidente en f; f es el único estado de aceptación en M'.

Veamos que $L(M) = L(M')$. Sea $w = x_1 \cdots x_k \in L(M)$. $k > 0$ porque $w \neq \lambda$. En el camino de aceptación de w, el último arco es de la forma (p, x_k, q), con $q \in F$. Dicho camino también es camino en M'. En este autómata, por la definición de ρ', hay un arco (p, x_k, f). Entonces, si el último arco del susodicho camino en M' se cambia por (p, x_k, f), lo que se obtiene es un camino w de ι a f, por lo que $w \in M'$. En forma análoga se puede probar que si $w \in M'$ entonces $w \in M$.

---

3. (Respuesta de Martín Solís) Diagrama de transiciones de un autómata que acepta a $L((x+y)^* + y^* z^*)$ y una gramática regular que genera a este lenguaje:



$S \to yS$
$S \to zA$
$S \to xB$
$S \to \lambda$
$A \to zA$
$A \to \lambda$
$B \to xB$
$B \to yB$
$B \to \lambda$

4.(Respuesta de Yuriria Cortés) De acuerdo a la definición recursiva de las expresiones regulares, proceder de la siguiente manera.

Para las cláusulas básicas:

- $r = \emptyset$. Diagrama sin estados de aceptación. Sirve el del a.f. $M = (\{\iota\}, \Sigma, \emptyset, \iota, \emptyset\}$.
- $r = \lambda$. Diagrama de un estado, inicial y de aceptación, sin arcos. $M = (\{\iota\}, \Sigma, \emptyset, \iota, \{\iota\}\}$.
- $r = x$, $x \in \Sigma$. Diagrama de dos estados (uno inicial y el otro de aceptación) y <u>un</u> arco del primero al segundo, etiquetado con x. $M = (\{\iota, f\}, \Sigma, \{(\iota, x, f)\}, \iota, \{f\}\}$.

Para las cláusulas recursivas:

- $r = r_1 + r_2$. Constuir diagramas para r_1 y r_2; entonces aplicarles el método visto en clase para construir un diagrama para $L(r_1) \cup L(r_2)$.
- $r = r_1 r_2$. Constuir diagramas para r_1 y r_2; entonces aplicarles el método visto en clase para construir un diagrama para $L(r_1)L(r_2)$.
- $r = r_1^\star$. Constuir diagrama para r_1; entonces aplicarle el método visto en clase para construir un diagrama para $L(r_1)^\star$.

---

5. (Respuesta de Daniel Cervantes) Sabemos que si L es lenguaje regular entonces L^R también lo es. Consideremos una gramática lineal izquierda G, cuyas producciones son de la forma $N \to Mx$ ó $N \to \lambda$. La gramática G' que se obtiene de G cambiando cada producción $N \to Mx$ por $N \to xM$ es regular. Si S es el símbolo inicial, sin dificultad se prueba que $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \iff S \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} w^R$. Entonces $L(G) = L(G')^R$, y como $L(G')$ es regular, $L(G)$ también es regular. Falta probar que si L es regular, entonces hay alguna gramática lineal izquierda que lo genera. Pero L^R es regular, por lo que hay alguna gramática regular G' que lo genera, es decir, $L(G') = L^R$. Si ahora partiendo de G' se construye la correspondiente gramática lineal izquierda G, tendremos que $L(G) = L(G')^R = (L^R)^R = L$.
